UEBER DIE

SINGULÄREN PUNKTE ALGEBRAISCHER FLÄCHEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER HOHEN

NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

EBERHARD-KARL-UNIVERSITÄT TÜBINGEN

VORGELEGT VON

ERWIN GECK
AUS STUTTGART.

TÜBINGEN, 1900
DRUCK VON H. LAUPP JR.

UEBER DIE

SINGULÄREN PUNKTE ALGEBRAISCHER FLÄCHEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER HOHEN

NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

EBERHARD-KARL-UNIVERSITÄT TÜBINGEN

VORGELEGT VON

ERWIN GECK
AUS STUTTGART.

ACAD.
LUGD.BAT.
RIJKS.

TÜBINGEN, 1900
DRUCK VON H. LAUPP JR.

Von der Fakultät angenommen den
16. Dezember 1899.

Inhalt.

Seite

Einleitung 4

§ 1. Die Reihen für die Umgebung einfacher Flächenpunkte 7

§ 2. Die Darstellung der Umgebung eines gewöhnlichen $s$fachen Punkts 9

§ 3. Successive vielfache Flächen-Punkte auf linearen Raumkurvenzweigen 14

§ 4. Successive vielfache Flächen-Punkte auf superlinearen Raumkurvenzweigen 20

§ 5. Mehrfache Faktoren von $(x, y, z)_s$ 26

§ 6. Die Konvergenzgebiete der Reihen 30

§ 7. Das Verhalten des der Fläche von einem Punkt von allgemeiner Lage aus umbeschriebenen Kegels in der nach dem singulären Punkt gehenden Kante 32

Anhang: Näherungsflächen für die Punkte der singulären Kurven einer Fläche 36

Einleitung.

Die Möglichkeit, für die Umgebung eines singulären Punkts einer algebraischen Fläche die kartesischen Koordinaten x, y, z durch eine Anzahl von Reihen darzustellen, welche nach ganzen positiven Potenzen zweier unabhängiger Parameter fortschreiten, wurde von Herrn Kobb[1]) nachgewiesen, indem er auf die Gleichung der Fläche eine räumliche quadratische ein-eindeutige Transformation (wie sie Herr Nöther in die wissenschaftliche Betrachtung eingeführt hat) anwandte. Durch fortgesetzte Anwendung solcher Transformationen kann nämlich der singuläre Punkt so aufgelöst werden, dass schliesslich nur noch einfache ihm entsprechende Punkte vorhanden sind. Wenn aber der singuläre Punkt auf einer singulären Linie liegt, oder wenn im Verlauf der Transformationen eine solche auftritt, so gelangt man, wie Herr Beppo Levi zeigte[2]), beständig zu vielfachen Punkten. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich nun, zunächst unter Ausschluss des letzten Falles, mit der genaueren Durchführung des angegebenen Verfahrens für die wichtigsten in der Flächentheorie auftretenden Fälle singulärer Punkte. Für diese werden Sätze aufgestellt, welche teilweise Analoga zu gewissen Sätzen über die singulären Punkte ebener Kurven sind (§§ 2, 3, 4, 5). In § 6 werden die Konvergenzgebiete der Reihen untersucht. Aus der Methode der quadratischen Transformationen ergeben sich die in § 7 enthaltenen Sätze über das Verhalten des der Fläche von irgend einem Punkt aus umbeschriebenen Tangentenkegels in der nach dem singulären Punkt gehenden Kante. Ein Anhang giebt

1) Kobb, Théorie des fonctions de deux variables, Journal de Liouville, IV^{s} t. 8 1892.

2) Levi, Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche dello spazio ordinario per trasformatione quadratiche. Ann. di mat. II^{s} t. 26. 1897.

eine Methode zur Darstellung von Näherungsflächen für die Umgebung von Punkten auf singulären Kurven.

Ich möchte mir erlauben, an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Brill in Tübingen meinen herzlichen Dank auszusprechen für das wohlwollende Interesse, das er mir bei der Ausführung dieser Arbeit entgegenbrachte und die reiche Anregung, die ich während meiner Studien von ihm erfahren durfte.

§ 1. Die Reihen für die Umgebung einfacher Flächenpunkte.

Eine algebraische Fläche sei durch eine Gleichung zwischen den kartesischen (etwa rechtwinkligen) Koordinaten x, y, z ihrer Punkte gegeben. Wir stellen uns die Aufgabe, die Koordinate z darzustellen durch eine unendliche Reihe, welche nach ganzen positiven Potenzen der unabhängigen Veränderlichen x und y fortschreitet. Wir machen dabei die Annahme, dass die Fläche durch den Nullpunkt des Koordinatensystems geht und dass der Koeffizient von z gleich -1 ist. Bezeichnen wir nun mit f_{ik} eine ganze homogene Funktion von x und y von der Ordnung i, so können wir die Gleichung unserer Fläche folgendermassen schreiben:

$$(1)\quad 0 = F \equiv -z + f_{10} + f_{20} + zf_{11} + z^2 f_{02} + f_{30} + zf_{21} + z^2 f_{12} + z^3 f_{03} + \ldots + z^n f_{on}.$$

Die Aufgabe wird gelöst durch die unendliche Reihe:

$$(2)\qquad z = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots$$

wo φ_ρ ebenfalls eine ganze, algebraische, rationale, homogene Funktion von x und y vom Grade ρ ist. φ_ρ hat $\rho + 1$ unbekannte Koeffizienten, welche durch Einsetzen von (2) in (1) gefunden werden können. Es ergiebt sich:

$$\varphi_1 = f_{10}$$
$$\varphi_2 = f_{20} + \varphi_1 f_{11} + f_{02}\varphi_1^{\,2}$$
$$\varphi_3 = f_{11}\varphi_2 + 2f_{02}\varphi_1\varphi_2 + f_{30} + f_{21}\varphi_1 + f_{12}\varphi_1^{\,2} + f_{03}\varphi_1^{\,3}$$
$$\varphi_4 = f_{11}\varphi_3 + f_{03}(\varphi_2^{\,2} + 2\varphi_1\varphi_3) + f_{21}\varphi_2 + 2f_{12}\varphi_1\varphi_2 + 3f_{03}\varphi_1^{\,2}\varphi_2 + f_{40} + f_{31}\varphi_1 + f_{22}\varphi_1^{\,2} + f_{13}\varphi_1^{\,3} + f_{04}\varphi_1^{\,4}$$

Allgemein hat man die Rekursionsformel:

$$(3)\qquad \varphi_\rho = \sum_{i,\varkappa} f_{i\varkappa} \sum_{\alpha,\rho} \frac{\varkappa!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\iota!} \varphi_{\rho_1}^{\alpha_1} \varphi_{\rho_2}^{\alpha_2} \cdots \varphi_{\rho\iota}^{\alpha\iota}$$

wo

$$(3a)\quad \begin{cases} i + \varkappa \leqq \rho \\ (i \text{ geht von } 0 \text{ bis } \rho, \text{ wenn } i + \varkappa = \rho, \text{ von } 0 \text{ bis } \rho - 1, \text{ wenn } 1 + \varkappa < \rho \\ \rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_\iota < \rho. \\ \Sigma\alpha = \varkappa \\ \Sigma\alpha\rho = \rho - i. \end{cases}$$

Die erste der 4 Gleichungen (3a) folgt daraus, dass beim Einsetzen von (2) in (1) Glieder ρter Ordnung nur aus denjenigen Gliedern $f_{ik} \cdot z^k$ entstehen können, deren Ordnung kleiner als ρ (höchstens gleich ρ) ist. Die zweite ist unmittelbar einleuchtend, die dritte folgt aus dem polynomischen Satz insofern die zweite Summe aus z^k entsteht. Die letztere ist von der Ordnung $\Sigma\alpha\rho$; und da f_{ik} von der Ordnung i ist, so ist die Ordnung der rechten Seite von (3) $\Sigma\alpha\rho + i = \rho$; dies ist aber die 4te Gleichung (3a).

Wir wenden uns nun zu der Frage, innerhalb welchen Gebiets konvergiert die Reihe (2)? Zu diesem Zweck setzen wir in die Gleichung (1) $y = \lambda x$ ein und erhalten eine Gleichung zwischen den Variabeln x und z, welche die Projektion der Schnittkurve der Fläche (1) und der Ebene $y - \lambda x = 0$ auf die Ebene $y = 0$ darstellt. Setzt man nun:

$$f_{i\varkappa}(x, \lambda x) = A_{i\varkappa} x^i$$

so lässt sich die Gleichung dieser Kurve schreiben:

$$0 = -z + A_{1\,0}x + A_{2\,0}x^2 + A_{1\,1}xz + A_{0\,2}z^2 + \ldots$$

Entwickelt man nun z in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe:

$$z = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{4}$$

so ist

$$a_\rho = \sum_{i,\varkappa} A_{i\varkappa} \sum_{\alpha,\rho} \frac{\varkappa!}{\alpha_1! \ldots \alpha!} a_{\rho_1}^{\alpha_1} \ldots a_{\rho_\varkappa}^{\alpha_\varkappa}.$$

Die Bedingungsgleichungen für α, ρ, $\varkappa$, i sind ganz dieselben wie (3a). Setzen wir nun $y = \lambda x$ in (2) ein, so erhalten wir:

$$\varphi_\rho(x, \lambda x) = a_\rho x^\rho,$$

also nichts anderes, als die Reihe (4). Diese konvergiert aber bis zu demjenigen Punkt, wo ausser $F(x, \lambda x, z) = 0$ zugleich auch

$$\frac{\partial F(x, \lambda x, z)}{\partial x} = 0$$

ist, der die kleinste absolute Entfernung vom Entwicklungszentrum besitzt (nach einem bekannten Satz von Cauchy). Ist k der betreffende Kurvenzweig in der xz-Ebene und wird die Reihenentwicklung für die Umgebung des auf k liegenden Punkts O hergestellt und ist Oa_1 der absolute Betrag der Abszisse des nächsten Punktes der bezeichneten Art, so wird die Reihe (4) konvergieren für diejenigen reellen Punkte, welche zwischen a_1 und a_2 liegen, (Oa_1 und Oa_2 von O aus auf der x-Axe nach entgegengesetzten Seiten abgetragen und $Oa_1 = Oa_2$). Die entsprechenden Punkte in der (x, y)-

Ebene seien b_1 und b_2. Lässt man λ varieren, so werden die Punkte b_1 und b_2 in der (x, y)-Ebene eine geschlossene in Beziehung auf O' symmetrische Kurve beschreiben. Die Reihe (2) wird für die Koordinaten x und y solcher Punkte konvergieren, welche innerhalb dieser Linie liegen. Errichtet man über ihr einen Cylinder, dessen Mantellinien parallel zur z-Axe verlaufen, so schneidet dieser von dem zunächst gelegenen Mantel der Fläche dasjenige Gebiet aus, das durch die Reihe (2) dargestellt ist.

Ist der Koeffizient von z in der Gleichung (1) Null (entgegen der seitherigen Voraussetzung), und soll z dennoch abhängige Variable sein, so hat man sämtliche drei Variable durch zwei unabhängige Parameter darzustellen. Man wird etwa setzen:

$$(5) \quad \begin{cases} x = x' + az' \\ y = y' + bz' \\ z = z', \end{cases}$$

dann z' durch eine nach ganzen positiven Potenzen von x' und y' fortschreitende Reihe darstellen und diese in (5) einsetzen. Im folgenden haben wir es bloss mit der Darstellung der drei Koordinaten durch zwei Parameter zu thun.

§ 2. Die Darstellung der Umgebung eines gewöhnlichen s-fachen Punkts.

Zum Zwecke der Darstellung der Umgebung eines singulären Flächenpunkts durch Reihen wendet Herr Kobb[1]) eine ein-eindeutige quadratische Transformation an (siehe Einleitung), welche im wesentlichen die folgende ist oder sich auf diese zurückführen lässt:

$$(1) \quad \begin{cases} x = \xi\zeta \\ y = \eta\zeta \\ z = \zeta. \end{cases}$$

Durch diese Transformation wird im Allgemeinen einem Punkt (ξ, η, ζ) des Raumes R_2 ein Punkt (x, y, z) des Raumes R_1 (den man sich etwa mit R_2 zusammenfallend denken mag) zugeordnet und umgekehrt. Der Fundamentalkegelschnitt des Raumes R_1 ist die doppelt gerechnete unendlich ferne Gerade der Ebene $z = 0$ (in der ∞ fernen Ebene liegend zu denken); Fundamentalpunkt ist der

1) l. c. S. 388 ff.

Ursprung. Im Raum R_2 ist der Fundamentalkegelschnitt dieselbe Gerade (aber in der Ebene $\zeta = 0$ liegend zu denken), Fundamentalpunkt ist der ∞ ferne Punkt der ζ-Axe.

Wir wollen uns nun die Art und Weise verdeutlichen, in der das Entsprechen beider Räume stattfindet. Zunächst sieht man sofort, dass dem Punkt $x = y = z = 0$ die ganze Ebene $\zeta = 0$ entspricht. Umgekehrt entspricht jedem Punkt $\xi = \text{const.}$ $\eta = \text{const.}$, $\zeta = 0$ der eine Punkt $x = y = z = 0$. Es kann nun der Fall eintreten, dass für $x = y = z = 0$ $lim\ \frac{x}{z}$ und $lim\ \frac{y}{z}$ einen bestimmten Wert besitzen (z. B. wenn sich ein Punkt auf der Graden $x = az$, $y = bz$ dem Ursprung nähert); dann ist:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x=0\\y=0}} \frac{x}{y} = a = \xi \\ \\ \lim\limits_{\substack{y=0\\z=0}} \frac{y}{z} = b = \eta \end{array}\right. \qquad \zeta = 0.$$

Wir können also sagen: einem Punkt der $(\xi\eta)$-Ebene des Raumes R_2 entspricht eine vom Ursprung des Raumes R_1 ausgehende Richtung. Einer Geraden $x = az$, $y = bz$ entspricht die zur ζ-Axe parallele Gerade $\xi = a$, $\eta = b$.

Ist nun $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer Fläche, welche im Ursprung O des Koordinatensystems einen singulären Punkt besitzt, so wenden wir auf diese eine solche quadratische Transformation an. Wir denken uns auf der Fläche in der Nähe des singulären Punkts O einen Punkt A. Diesem wird im Raum R_2 ein Punkt A entsprechen (und zwar $z = \zeta$); der Geraden AO wird eine vertikale Gerade durch A entsprechen. Rückt nun A immer näher an O heran und fällt schliesslich mit O zusammen, so wird die Gerade OA immer mehr an den Tangentialkegel im singulären Punkt heranrücken und schliesslich eine Mantellinie desselben werden. Dann muss im Raum R_2 der Punkt A auf die Ebene $\zeta = 0$ gerückt sein, die vertikale Gerade trifft also die transformierte Fläche $F' = 0$ in einem Punkte der Ebene $\zeta = 0$. Jeder Mantellinie jenes Tangentialkegels entspricht also eine Gerade, welche die Fläche $F' = 0$ in $\zeta = 0$ trifft. Also kann man jedem dem singulären Punkt unendlich benachbarten, auf dem Tangentialkegel liegenden Punkt d. h. jeder Kante desselben einen Punkt der Kurve

$$\begin{array}{l} F' = 0 \\ \zeta = 0 \end{array} \qquad (2)$$

entsprechen lassen, oder kurz: dem singulären Punkt $x = y = z = 0$ entspricht die Kurve (2).

Die Gleichung einer Fläche mit einem $s$fachen Punkt im Ursprung sei folgendermassen gegeben:

(3) $$F = 0 = (x, y, z)_s + (x, y, z)_{s+1} + (x, y, z)_{s+2} + \ldots$$

Die Klammerausdrücke sind rationale, ganze homogene Funktionen von x, y, z; die Indices geben die betreffenden Grade an. Man wendet nun die Transformationsformeln (1) auf (3) an und erhält, indem man mit ζ^s durchdividiert:

(3′) $$F' = 0 = (\xi, \eta, 1)_s + \zeta(\xi, \eta, 1)_{s+1} + \zeta^2(\xi, \eta, 1)_{s+2} + \ldots$$

Sollen nun für die ganze Umgebung des singulären Punkts im ersten Raum Reihen hergestellt werden, so müssen wir offenbar für die Umgebung einzelner Punkte der Kurve

(2) $$\begin{aligned} F' &= 0 \\ \zeta &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} (\xi, \eta, 1)_s &= 0 \\ \zeta &= 0 \end{aligned}$$

Reihen herstellen, in der Weise, dass die Koordinaten jedes Punkts der Kurve (2) dargestellt sind. Damit das Entwicklungszentrum im Ursprung liegt, haben wir die Fläche parallel zur $\zeta\eta$-Ebene zu verschieben, d. h. zu setzen

$$\begin{aligned} \xi &= \zeta_1 + \alpha \\ \eta &= \eta_1 + \beta \\ \zeta &= \zeta_1 \end{aligned}$$

Dabei muss sein:

$$(\alpha, \beta, 1)_s = 0.$$

Indem wir die Transformation (1) und die letzte in eine zusammenziehen, erhalten wir (ohne Indices):

(4) $$\begin{aligned} x &= (\xi + \alpha)\zeta \\ y &= (\eta + \beta)\zeta \\ z &= \zeta. \end{aligned}$$

Ist der Ursprung für die Fläche ein einfacher Punkt, so kann man ζ durch eine Reihe, welche nach ganzen positiven Potenzen fortschreitet, ausdrücken [1]).

Es sei (5) $$\zeta = p(\xi, \eta)$$

1) Es empfiehlt sich aus Gründen der Symmetrie, die ausgezeichnete Variable ζ als solche beizubehalten. Herr Kobb stellt in der erwähnten Abhandlung ξ durch η und ζ dar.

dann ist

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi p(\xi,\eta) + \alpha p(\xi,\eta) \\ y &= \eta p(\xi,\eta) + \beta p(\xi,\eta) \\ z &= p(\xi,\eta). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Die Reihe (5) hat aber nur ein beschränktes Konvergenzgebiet, das sich keinenfalls über die ganze Kurve (2) erstreckt. Der Giltigkeitsbereich einer Reihe wird sich nicht über einen Punkt hinaus erstrecken können, wo zugleich

$$F' = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F'}{\partial \zeta} = 0$$

ist. Solche Stellen sind auf der Ebene $\zeta = 0$ diejenigen, wo:

$$(7) \qquad (\xi, \eta, 1)_s = 0, \ (\xi, \eta, 1)_{s+1} = 0$$

ist. Nun brauchen wir aber so viele Reihen, dass jeder der Punkte von (2) innerhalb eines Konvergenzgebiets liegt; es ist also nötig für die Umgebung der s $(s+1)$ Punkte, welche durch (7) gegeben sind, besondere Entwicklungen herzustellen. Um diese Punkte der Reihe nach in den Ursprung zu verlegen, wenden wir die Transformationsformeln (4) an; doch muss jetzt sein:

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta, 1)_s &= 0 \\ (\alpha, \beta, 1)_{s+1} &= 0 \end{aligned}$$

Man hat also s $(s+1)$ Punkte dieser Art. Der Koeffizient von ζ in $F' = 0$ ist aber, wie man leicht sieht, $(\alpha, \beta, 1)_s$ also hier Null, wir müssen daher (s. S. 9) eine Transformation von folgender Form anwenden:

$$(4') \quad \left\{\begin{aligned} \xi &= \zeta_1 + a\zeta_1 \\ \eta &= \eta_1 + b\zeta_1 \\ \zeta &= \zeta_1 \ , \end{aligned}\right.$$

wo a und b beliebige Konstanten sind. Durch Zusammenziehen von 4) und (4') erhält man (ohne Indices):

$$(4'') \quad \left\{\begin{aligned} x &= (\xi + a\zeta + \alpha)\zeta \\ y &= (\eta + b\zeta + \beta)\zeta \\ z &= \zeta . \end{aligned}\right.$$

Nun ist es wieder möglich, ζ nach Potenzen von ξ und η zu entwickeln und die erhaltenen Reihen in (4'') einzusetzen.

Eine besondere Behandlung verlangen weiter die ∞ fernen Punkte der Kurve (2); denn es ist klar, dass für deren Umgebung besondere Entwicklungen herzustellen sind. Man hat hiezu eine solche Transformation anzuwenden, welche bewirkt, dass die bei der Transformation (4) ins Unendliche fallenden Punkte jetzt ins Endliche zu liegen kommen. Dies wird erreicht, wenn man setzt

$$(8)\quad \begin{cases} x = x' \ , \ y = y' \\ z = \alpha x' + by' + cz' \end{cases}$$

(a und b sind beliebige Konstante); dann wenden wir erst wieder die Transformation (4) an. Die unendlich fernen Punkte der Kurve (2) entsprechen nun den Mantellinien des Tangentialkegels im singulären Punkt, welche gegeben sind durch:

$$(x, y, z)_s = 0 \ , \ z = 0.$$

Diesen entsprechen aber bei der durch die Transformation (8) erhaltenen Fläche die Mantellinien

$$(x', y', ax' + by' + cz')_s = 0$$
$$ax' + by' + cz' = 0,$$

und diesen entsprechen, wenn man auf die letzte Fläche die Transformation (1) anwendet, die Punkte:

$$(\xi, \eta, a\xi + b\eta + c)_s = 0 \qquad \zeta = 0$$
$$a\xi + b\eta + c = 0$$

Es sind daher noch Entwicklungen für die Umgebung dieser Punkte herzustellen. Die Grössen α und β [s. Gl. (4)] sind nun so zu wählen, dass:

$$a\alpha + b\beta + c = 0$$
$$(\alpha, \beta, a\alpha + b\beta + c)_s = (\alpha, \beta, 0)_s = 0$$

Durch Zusammenziehen der Transformationsformeln (8) und (4) erhält man:

$$(9)\qquad x = (\xi - \alpha)\zeta, \quad y = (\eta - \beta)\zeta, \quad z = (a\xi + b\eta)\zeta \ ^1).$$

Beachten wir nun, dass wir, indem wir für die Punkte der Kurve (2) Entwicklungen herstellen, für die ursprüngliche Fläche in der Umgebung der entsprechenden Mantellinien des Tangentialkegels im singulären Punkt Entwicklungen geben, so können wir folgendes aussprechen:

Zur vollständigen Darstellung der Umgebung eines singulären Punkts einer Fläche braucht man:

1) eine nicht näher bestimmbare Anzahl von Reihen für die Umgebung der gewöhnlichen Mantellinien des Kegels $(x, y, z)_s = 0$.

2) $s(s+1)$ Reihen für die ausgezeichneten Mantellinien $(y, x, z)_s = 0$, $(x, y, z)_{s+1} = 0$. (Ausgezeichnete Reihen.)

Unter diesen [sowohl 1) als 2)] müssen sich die s Reihen für die Mantellinien $(x, y, z)_s = 0$, $z = 0$ befinden (weniger als s, falls

1) Die von Herrn Kobb zur Behandlung der ∞fernen Punkte von (2) vorgeschlagenen Transformationen (l. c. S. 395) ist von der hier verwendeten insofern verschieden, als bei ihm $a = 0$, $b = 1$, $\beta = 1$, der Koeffizient von η in dem Ausdruck für y gleich Null, und η mit ζ vertauscht ist.

$(x, y, 0)_s = 0$ einen mehrfachen Faktor hat). Sie gehören zu den ausgezeichneten Reihen 2), wenn $(x, y, 0)_s = 0$, $(x, y, 0)_{s+1} = 0$ einen gemeinsamen Faktor haben. Zu bemerken ist, dass die ausgezeichneten Reihen 2) in geringerer Anzahl vorhanden sind, wenn die Kegel $(x, y, z)_s = 0$ und $(x, y, z)_{s+1} = 0$ sich berühren. Ueber eine weitere Verminderung dieser Zahl siehe § 3.

Anm. 1. Der Kegel $(x, y, z)_s$ darf in mehrere einfache Faktoren zerfallen, nicht in Doppelfaktoren; hierüber siehe § 5.

Anm. 2. Hat man in dieser Weise die Reihen für x, y, z hergestellt, so lassen sich $x - \alpha z$, $y - \beta z$ bilden, so dass die Reihen für diese Ausdrücke mit Gliedern 2ter Ordnung anfangen.

§ 3. Successive vielfache Punkte auf linearen Kurvenzweigen.

Besitzt die nach der ersten Transformation erhaltene Kurve (2) (§ 2) einen vielfachen Punkt und ist für diesen Punkt $(\xi, \eta, 1)_{s+1} \gtrless 0$. so ist dieser für die Fläche ein einfacher Punkt und die Tangentialebene in demselben ist die Ebene $\zeta = 0$; es ist daher nicht nötig für ihn eine besondere Entwicklung herzustellen. Ist jener Kurvenpunkt ein s'facher und geht die Kurve $(\xi, \eta, 1)_{s+1} = 0$ einfach durch ihn hindurch, so ist, wie man leicht an der Gestalt der Gleichung (3′) in § 2 für die Fläche $F' = 0$ erkennt, jener Punkt für die Fläche ein biplanarer Knotenpunkt (eine der Tangentialebenen ist $\zeta = 0$); geht die Kurve $(\xi, \eta, 1)_{s+1}$ mehrfach hindurch, so ist der Punkt für die Fläche ein uniplanarer Knotenpunkt. Soll der Punkt auch für die Fläche $F' = 0$ ein s'facher sein, so dürfen in der Gleichung (3′) (§ 2) als Glieder niederster Ordnung nur solche von der s'ten vorkommen, also müssen durch den singulären Punkt gehen:

$$
\begin{aligned}
(\xi, \eta, 1)_s &= 0 \text{ mindestens } s'\text{mal} \\
(\xi, \eta, 1)_{s+1} &= 0 \text{ mindestens } s'\text{mal} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \quad [1] \\
(\xi, \eta, 1)_{s+r} &= 0 \text{ mindestens } s'-r\text{mal} \\
(\xi, \eta, 1)_{s+s'} &= 0 \text{ mindestens } 1\text{mal.}
\end{aligned}
$$

Offenbar fallen jetzt von den $s(s+1)$ ausgezeichneten Reihen (s. S. 13) (mindestens) $s'(s'+1)$ weg, (denn dies ist die Anzahl der gemeinschaftlichen Schnittpunkte von $(\xi, \eta, 1)_s = 0$ und $(\xi, \eta, 1)_{s+1} = 0$

1) vergl. Segre, Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche; Ann. di mat. IIs t. 25. 1897 S. 13 f.

in dem vielfachen Punkt). Wir werden nun den vielfachen Punkt in den Nullpunkt verlegen und wieder eine quadratische Transformation, etwa die folgende, anwenden:

$$(1) \qquad \xi = (\xi_1 + \alpha_1)\zeta \qquad \eta = (\eta_1 + \beta_1)\zeta_1 \qquad \xi = \zeta_1 .$$

Wir verfahren nun ganz wie oben: zur vollständigen Darstellung gehört eine nicht näher bestimmbare Anzahl gewöhnlicher Reihen und $s'(s'+1)$ ausgezeichnete Reihen. Die gesamte Transformation wird nun: (durch Zusammenziehung von Gleichung (4) § 2 und (1)):

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= \xi_1\zeta_1^{\,2} + \alpha_1\zeta_1^{\,2} + \alpha\zeta_1 \\ y &= \eta_1\zeta_1^{\,2} + \beta_1\zeta_1^{\,2} + \beta\zeta_1 \\ z &= \zeta_1 . \end{aligned}$$

In diese Formeln ist für ζ_1 die nach Potenzen von ξ_1 und η_1 fortschreitende Reihe einzusetzen. Die aus $F=0$ durch die Transformation (2) erhaltene Fläche sei:

$$F'' = 0 = (\zeta_1, \eta_1, 1)_{s'} + \zeta(\xi_1, \eta_1, 1)_{s'+1} + \ldots$$

Es ist nun noch für die Umgebung der ∞ fernen Punkte von $(\xi_1, \eta_1, 1)_{s'} = 0$ $\zeta_1 = 0$ zu entwickeln; hiezu ist auf die Fläche $F'=0$ die Transformation

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_1 + \alpha_1)\zeta_1 \\ \eta &= (\eta_1 + \beta_1)\zeta_1 \\ \zeta &= (a\xi_1 + b\eta_1)\zeta_1 \end{aligned}$$

anzuwenden: oder die Fläche $F'=0$ ist folgender Transformation zu unterwerfen:

$$\begin{aligned} x &= (\xi_1 + \alpha_1)(a\zeta_1 + b\eta_1)\zeta_1^{\,2} + \alpha(a\xi_1 + \eta_1)\zeta_1 \\ y &= (\eta_1 + \beta_1)(a\xi_1 + b\eta_1)\zeta_1^{\,2} + \beta(a\xi_1 + b\eta_1)\zeta_1 \\ z &= (a\xi_1 + b\eta_1)\zeta_1 \end{aligned}$$

Wir haben also s' Entwicklungen (höchstens), bei denen alle drei Reihen für x, y und z mit Gliedern 2ter Ordnung beginnen.

Aus den Gleichungen (2) folgt, dass sich solche Ausdrücke

$$x - \alpha z - \alpha_1 z^2, \quad y - \beta z - \beta_1 z^2$$

bilden lassen, dass die nach ξ_1, η_1 fortschreitenden Reihen für diese Ausdrücke mit Gliedern 3ter Ordnung beginnen. Wir können daher diese Reihen in eine Gruppe zusammenfassen. Wenn nun auf den s-fachen Punkt unmittelbar ein s'-facher, auf diesen ein s''-facher etc. $(s \geq s' \geq s'' \ldots)$ [1]) folgt und wenn die einzelnen vielfachen Punkte bei der Anwendung der successiven quadratischen Transformationen von der Form (4) (§ 2) immer ins Endliche zu liegen kommen, so können wir folgende Sätze aussprechen:

1) vergl. Kobb l. c. S. 402 ff., Levi l. c. S. 327.

I. Von den zur vollständigen Darstellung der Umgebung eines singulären Punkts nötigen Entwicklungen lässt sich ein Teil zu einer Gruppe zusammenfassen, ein Teil der Entwicklungen dieser Gruppe zu einer Teilgruppe, ein Teil von denen der letzteren zu einer zweiten Teilgruppe u. s. w., wobei sich jede der Teilgruppen auf einen der successiven singulären Punkte bezieht. Die Gruppen und Teilgruppen sind dadurch charakterisiert, dass, wenn man bildet:

für die erste Gruppe $x - \alpha z - \alpha_1 z^2$

für die erste Teilgruppe $x - \alpha z - \alpha_1 z^2 - \alpha_2 z^3$

für die nächste Teilgruppe $x - \alpha z - \alpha_1 z^2 - \alpha_2 z^3 - \alpha_3 z^4$

. . . . . .

für die letzte Teilgruppe $x - \alpha z - \ldots \alpha_{r-1} z^r$

und analoge Ausdrücke in y, dass dann immer die nach Potenzen von ξ und η (bezw. ξ_1, η_1 oder ξ_2 η_2 etc.) fortschreitenden Reihen für diese Ausdrücke mit Gliedern bezw. von der Ordnung 3, 4, 5, . . . $r+1$ anfangen.

II. Die $i$te Gruppe enthält $s^{(i)}(s^{(i)}+1) - s^{(i+1)}(s^{(i+1)}-1)$ ausgezeichnete Reihen (s. o. S. 11) die letzte $s^{(r)}(s^{(r)}+1)$.

III. Jede der Teilgruppen enthält (höchstens) s', s'' . . . $s^{(r)}$ Entwicklungen, bei denen alle drei Reihen für x, y und z mit Gliedern 2ter Ordnung beginnen und bei denen die Reihen für die Ausdrücke des Satzes I bei Weglassung der in z höchsten Glieder, mit Gliedern von der Ordnung $2i+1$ beginnen (für die $i$te Gruppe). Der Beweis für den letzten Satz ergiebt sich daraus, dass man durch Zusammenziehung der quadratischen Transformationen, welche zu den betreffenden Punkten führen, die Gesamttransformationsformeln erhält:

$$x = (\xi - \alpha_i)(a\xi + b\eta)^i\zeta^{i+1} + \sum_{\varkappa=1}^{i} \alpha_{\varkappa-1}(a\xi + b\eta)^\varkappa \zeta^\varkappa$$

$$y = (\eta - \beta_i)(a\xi + b\eta)^i\zeta^{i+1} + \sum_{\varkappa=1}^{i} \beta_{\varkappa-1}(a\xi + b\eta)^\varkappa \zeta^\varkappa$$

$$z = (a\xi + b\eta)\zeta.$$

Die auf S. 14 für die Kurven $(\xi, \eta, 1)_{s+1} = 0$ etc. aufgestellte Bedingung gilt natürlich ebenso auch bei allen andern successiven vielfachen Punkten. Ist sie jedoch an einer bestimmten Stelle nicht erfüllt, so ist, wenn die Kurve $(\xi, \eta, 1)_{s^{(i)}} = 0$ einen $s^{(i+1)}$ fachen Punkt hat, dieser Punkt für die Fläche von niederer Ordnung. In diesem Fall ist ζ^ρ ein Teil des Tangentialgebildes im singulären

Punkt. Ueber den Fall $p > 1$ siehe § 5. Ist $p = 1$, so gelten nur noch die Sätze I und II, dagegen nicht mehr Satz III. Man hat dann die Transformation

$$\xi_i = (\xi_{i+1} + \alpha_{i+1})\zeta_{i+1}$$
$$\eta_i = (\eta_{i+1} + \beta_{i+1})\zeta_{i+1}$$
$$\zeta_i = \zeta_{i+1}(a\xi_{i+1} + b\eta_{i+1})$$

anzuwenden und für die Umgebung einzelner Punkte der Geraden

$$a\xi_{i+1} + b\eta_{i+1} = 0,\ \zeta_{i+1} = 0$$

zu entwickeln (abgesehen von dem übrigen Teil des Kegels im singulären Punkt). Die Eigenschaften dieser Reihen sind dieselben wie die in Satz III ausgesagten; ihre Zahl ist nicht mehr bestimmt.

Nach Satz I sind die auf den letzten der successiven vielfachen Punkte bezüglichen Ausdrücke von der dort angegebenen Eigenschaft die folgenden:

$$(3)\quad x - \alpha z - \alpha_1 z^2 - \ldots - \alpha_{r-1} z^r$$
$$y - \beta z - \beta_1 z^2 - \ldots - \beta_{r-1} z^r.$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke gleich Null, so stellen sie eine rationale Raumkurve dar; wendet man auf diese dieselben successiven quadratischen Transformationen an, die man auf die Fläche $F = 0$ anwandte, so erkennt man, dass die transformierten Kurven immer durch den Ursprung der jeweiligen Coordinatensysteme gehen; unsere Transformationen sind aber so gewählt, dass die successiven vielfachen Punkte immer auch in den Ursprung zu liegen kommen. Jene Kurve verbindet also die successiven vielfachen Punkte.

Anm. Bildeten die Ausdrücke (3) eine unendliche Reihe so würde dies daher rühren, dass man unendlich viele, etwa $s^{(r)}$-fache successive Punkte hätte. Dann hätte die Fläche eine $s^{(r)}$-fache Kurve, welche eben durch jene (unendlichen) Ausdrücke (3) dargestellt ist.

Beispiel. Zur Erläuterung des Bisherigen möge nun ein höherer biplanarer Knotenpunkt eingehender betrachtet werden. Dieser möge auf einer Fläche 4ter Ordnung liegen, deren Gleichung lautet:

$$(4)\quad F = 0 = xy + f_3 + z.f_2 + z^2 f_1 + az^3 + g_4 + zg_3 + z^2 g_2 + z^3 g_1 + bz^4$$

Dabei sind die f und g ganze homogene Funktionen von x und y, deren Grade durch die Indices angegeben sind, und zwar sei

$$f_3 = a_{30}x^3 + a_{21}x^2 y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$$
etc.

und $g_4 = b_{40}x^4 + b_{30}x^3 y + \ldots$
etc.

Wir transformieren mittels der Gleichungen:

$$x = \xi\zeta,\ y = \eta\zeta,\ z = \zeta.$$

und erhalten:

(4′) $F' = 0 = \xi\eta + \zeta(f_3 + f_2 + f_1 + a) + \zeta^2(g_4 + g_3 + g_2 + g_1 + b)$

wo die f und g dasselbe wie oben, nur in ξ und η statt in x und y geschrieben, bedeuten. Wir haben also für die Umgebung einer Anzahl von Punkten der Geraden $\xi = 0,\ \zeta = 0$ und $\eta = 0,\ \zeta = 0$ zu entwickeln. Die sechs ausgezeichneten Punkte sind hier:

$$\xi = 0,\ a_{03}\eta^3 + a_{02}\eta^2 + a_{01}\eta + a = 0,\ \zeta = 0$$

und $\eta = 0\ \ a_{30}\xi^3 + a_{20}\xi^2 + a_{10}\xi + a = 0\ \ \zeta = 0.$

Wir wollen zunächst eine gewöhnliche Reihe herstellen z. B. für die Umgebung des Punkts $\eta = 0,\ \xi = \alpha,\ \zeta = 0$; man hat daher in (4′) $\xi + \alpha$ an Stelle von ξ zu setzen. Es ist:

$$0 = (\xi + \alpha)\eta + \zeta(A + A_{01}\xi + A_{10}\eta + A_{20}\xi^2 + A_{11}\xi\eta + A_{02}\eta^2 + \\ + A_{30}\xi^3 + A_{21}\xi^2\eta + A_{12}\xi\eta^2 + A_{03}\eta^3) + \zeta^2(B + \ldots)$$

wo $A \ = a_{03}\alpha^3 + a_{02}\alpha^2 + a_{01}\alpha + a$

$$A_{01} = a_{10} + 2a_{20}\alpha + 3a_{30}\alpha^2$$

$$A_{10} = a_{21}\alpha^2 + a_{11}\alpha + a_{01}$$

Die Reihen lauten:

$$z = \zeta = -\frac{\alpha}{A}\eta - \left(\frac{1}{A} - \frac{\alpha}{A}A_{10}\right)\xi\eta - \left(\frac{\alpha}{A}A_{01} + \frac{B\alpha^2}{A^2}\right)\eta^2 + \ldots$$

$$x = -\frac{\alpha^2}{A}\eta + \frac{\alpha^2}{A}A_{10}\eta\xi + \left(\frac{\alpha^2 A_{11}}{A} - \frac{B\alpha^3}{A^2}\right)\eta^2 + \ldots$$

$$y = -\frac{\alpha}{A}\eta^2 - \left(\frac{1}{A} + \frac{\alpha}{A}A_{10}\right)\xi\eta^2 - \left(\frac{\alpha A_{01}}{A} + \frac{\alpha^2 B}{A^2}\right)\eta^3 + \ldots$$

Nun möge noch eine ausgezeichnete Reihentwicklung aufgestellt werden. Hier ist α so zu wählen, dass $A = 0$ wird. In (4′) tritt $\xi + \alpha$ an Stelle von ζ und $\eta - \zeta$ an Stelle ζ (also $a = 0,\ b = 1$, s. S. 12). Man findet:

$$z = \zeta = \eta + A_{10}\xi\eta + B\eta^2 + \ldots$$

$$x = \alpha\eta + (A_{10} + 1)\xi\eta + B\eta^2 + \ldots$$

$$\eta = -A\xi\eta^2 - B\eta^3 + \ldots$$

Der Kurve $(\xi,\eta,1)_s = 0$ der allgemeinen Theorie entspricht in Gleichung (4′) das Geradenpaar $\xi\,\eta = 0$. Soll der Doppelpunkt dieser letzteren Kurve auch für die Fläche ein Knotenpunkt sein, so muss $a = 0$ sein. Die Gleichung (4′) lässt sich dann folgendermassen schreiben:

$$F' = 0 = \xi\eta + \zeta f_1 + b\zeta^2 + (\zeta f_2 + \zeta^2 g_1) + (\zeta f_3 + \zeta^2 g_2) + \zeta^2 g_3 + \zeta^2 g_4.$$

Der Knotenpunkt dieser Fläche wird im Allgemeinen ein konischer sein. Wenn man durch eine weitere quadratische Transformation die für diesen Punkt nötigen Entwicklungen herstellt, so findet man,

dass von den sechs ausgezeichneten Reihen zwei sich auf die unendlich fernen Punkte des vermöge der nächsten Transformation dem Kegel zweiter Ordnung entsprechenden Kegelschnitts beziehen. Ist aber auch dieser Knotenpunkt biplanar, d. h. zerfällt $\xi\eta+\zeta f_1+b\zeta^2$ in zwei Faktoren, so muss

$$b = a_{01}\cdot a_{10}$$

sein; die beiden Faktoren lauten dann $(\xi+a_{01}\zeta)$ und $(\xi+a_{10}\zeta)$. Wir transformieren mittelst:

$$\xi=(\xi_1-a_{01})\zeta_1 \qquad \zeta=\zeta_1$$
$$\eta=(\eta_1-a_{10})\zeta_1$$

und erhalten (ohne Indices der Variabeln geschrieben).

$$0=F''=\xi\eta+\zeta(f_2+f'_1+A')+\zeta^2(\quad)-\ldots$$

wo $A'=f_2(-a_{01},\ a_{10})+g_1(-a_{01},\ -a_{10})$ etc.

Entwickeln wir nun für die Umgebung des Nullpunkts, so ist:

$$(5)\quad z=\zeta=-\frac{1}{A'}\xi\eta+\xi\eta\varphi_1+\xi\eta\varphi_2+\ldots$$

wo die φ ganze homogene Funktionen von ξ, η sind

$$\text{und } x=-\frac{a_{01}}{A'^2}\xi^2\eta^2-\frac{a_{01}}{A'^2}\xi^3\eta^2-\frac{2a_{01}}{A'^2}\xi^2\eta^2\varphi_1+\ldots$$

$$y=-\frac{a_{10}}{A'^2}\xi^2\eta^2-\frac{a_{10}}{A'^2}\xi^3\eta^2-\frac{2a_{10}}{A'^2}\xi^2\eta^2\varphi_1+\ldots$$

Hat man nun r successive Knotenpunkte zweiter Ordnung, wobei jeder biplanar sein muss bis auf den letzten, der auch konisch sein kann (jeder Knotenpunkt zweiter Ordnung, der einen successiven Knotenpunkt hat, ist biplanar), so erhält man durch das Zusammenziehen sämtlicher Transformationen, die schliesslich zur Zerlegung des letzten führen:

$$x=\xi\zeta^r+\alpha_r\xi^r+\alpha_{r-1}\zeta^{r-1}+\ldots+\alpha_1\zeta$$
$$y=\eta\zeta^r+\beta_r\zeta^r+\beta_{r-1}\zeta^{r-1}+\ldots+\beta_1\zeta$$
$$z=\zeta$$

Nimmt man nun an, dass auch der letzte der r Knotenpunkte biplanar sei und entwickelt man für die Umgebung des Doppelpunkts des dem letzten Knotenpunkt entsprechenden Kegelschnitts ζ nach Potenzen von ξ und η, so ist, wie man auf Grund von Gleichung (5) leicht einsieht:

$$\zeta=A\xi\eta+\xi\eta\varphi_1+\xi\eta\varphi_2+\ldots$$

Bildet man nun die Reihen für ξ, η, ζ und dann für

$$x-\alpha_1 z$$
$$x-\alpha_1 z-\alpha_2 z^2$$
$$\ldots\ldots$$

$$x - \alpha_1 z \quad \ldots - \alpha_\varkappa z^\varkappa$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x - \alpha_1 z \quad \ldots - \alpha_r z^r$$

und analoge Ausdrücke für y, so erkennt man, dass die Reihen für diese Ausdrücke der Reihe nach beginnen mit Gliedern von der Ordnung 4, 6, 8 ... $2(\varkappa+1)$.... $2(r+1)-1$. Jener biplanare Knotenpunkt ist ein sog. B_{2r+1}; d. h. er vermindert die Klasse der Fläche um $2r+1$ Einheiten. Dies bildet ein Analogon zu einer für den D_{2r+1}, d. h. für den die Klasse einer e b e n e n algebraischen Kurve um $2r+1$ Einheiten erniedrigenden Doppelpunkt (Spitze $r$ter Art) geltenden Bemerkung. Ist nämlich ein solcher Zweig gegeben durch:

$$x = a_1\lambda^2 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^4 + \ldots$$
$$y = \lambda^2 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^4 + \ldots$$

so muss sein: $x - a_1 y = A_1\lambda^4 + A\lambda^5 + \ldots$

also $a_1 a_2 - b_1 = 0.$

Soll es eine Spitze dritter Art sein, so ist:

$$x - a_1 y - A_1 y^2 = B_1\lambda^6 + B_2\lambda^7 + \ldots$$

d. h. der Coeffizient von λ^5 muss verschwinden. Dann ist aber:

$$x - a_1 y - A_1 y^2 - B_1 y^3 = C_1\lambda^7 + C_2\lambda^8 + \ldots$$

Allgemein erkennt man, dass beim D_{2r+1} sich solche Ausdrücke $x - a_1 y$, $x - a_1 y - A_1 y^2$, ... $x - a_1 y - \ldots - A_{r-1} y^r$ bilden lassen, dass die nach Potenzen von λ fortschreitenden Reihen für diese Ausdrücke beginnen mit der 4ten, 6ten, ... $(2\varkappa+1)$ten ... $[2(r+1)-1]$ten Potenz von λ.

§ 4. Successive vielfache Flächen-Punkte auf superlinearen Raumkurvenzweigen.

Gelangt man durch Anwendung einer quadratischen Transformation von der Form (4) (§ 2) auf eine Fläche $F=0$ zu einer Fläche $F'=0$, und hat diese einen auf der Ebene $\zeta=0$ liegenden singulären Punkt, welcher in einer in diese Ebene fallenden Richtung einen (und zunächst nur einen) unendlich benachbarten singulären Punkt hat, so ist ein die beiden letzten Punkte verbindender Kurvenzweig, der möglichst wenige Punkte mit der Ebene $\zeta=0$ gemein hat gegeben durch:

$$(1) \quad \xi = a\zeta^{\frac{1}{2}} + \ldots, \quad \eta = b\zeta^{\frac{1}{2}} + \ldots.$$

Diesem Kurvenzweig wird im ursprünglichen Raum einer entsprechen, der sich folgendermassen darstellen lässt:

$$x = \alpha z + a z^{\frac{3}{2}} + \ldots, \; y = \beta z + b z^{\frac{3}{2}} + \ldots;$$

die successiven singulären Punkte, (nämlich der ursprüngliche der Fläche $F = 0$ mit den beiden successiven auf $F' = 0$) liegen also auf einem superlinearen Zweig (hier von der 2ten Ordnung). Würde man jetzt auf $F' = 0$ eine Transformation von der obigen Form anwenden, so würde man eine Fläche $F'' = 0$ erhalten, welche auf der ∞ fernen Geraden der Ebene $\zeta = 0$ einen singulären Punkt hat. Um dies zu vermeiden, hat man statt der Transformation (4) (§ 2) eine solche von der Form (9) (§ 2) anzuwenden. Durch Zusammenziehen beider Transformationen erhält man (ohne Indices der Variabeln geschrieben):

$$(2) \quad \begin{cases} x = [(\xi + \alpha_1)\zeta + \alpha](a\xi + b\eta)\zeta \\ y = (\eta + \beta_1)\zeta + \beta](a\xi + b\eta)\zeta \\ z = (a\xi + b\eta)\zeta. \end{cases}$$

Liegen nun nicht bloss 2, sondern λ successive singuläre Punkte auf der Ebene $\zeta = 0$ des zweiten Raums, so wird deren erster durch die Transformation (2) aufgelöst. Da aber der Ebene $\zeta = 0$ des zweiten Raums die Ebene $(a\xi + b\eta) = 0$ des dritten entspricht, so liegen auf dieser Ebene noch $\lambda - 1$ successive singuläre Punkte. Zur Auflösung derselben können Transformationen von der Form (2) § 4 angewandt werden, die Grössen α und β sind aber so zu wählen, dass

$$(a\alpha_i + b\beta_i) = 0 \quad (i = 2, 3 \ldots \lambda)$$

(denn jeder folgende singuläre Punkt liegt in einer in die jedesmalige Ebene $a\xi + b\eta = 0$ fallenden Richtung). Die gesamten Transformationsformeln werden dann sein:

$$(3) \quad \begin{cases} x = \left[\xi\zeta^{\lambda} + \sum_1^{\lambda} \alpha_i \zeta^i + \alpha_0\right](a\xi + b\eta)\zeta^{\lambda} \\ y = \left[\eta\zeta^{\lambda} + \sum_1^{\lambda} \beta_i \zeta^i + \beta_0\right](a\xi + b\eta)\zeta^{\lambda} \\ z = (a\xi + b\eta)\zeta^{\lambda} \end{cases}$$

Hat nun die Fläche, zu der man durch die Transformation (3) gelangt ist, λ_1 successive singuläre Punkte auf der Ebene $\zeta = 0$, so ist zu deren Auflösung eine Transformation nötig, welche man aus (3) dadurch erhält, dass man an Stelle von ξ, η, ζ die folgenden Ausdrücke treten lässt:

$$(4)\quad \begin{cases} \xi\zeta^{\lambda_1} + \sum_1^{\lambda_1} \gamma_i \zeta^i \\ \eta\zeta^{\lambda_1} + \sum_1^{\lambda_1} \delta_i \zeta^i \\ (a_1\xi + b_1\eta)\zeta^{\lambda_1} \end{cases}$$

Die so erhaltene Fläche möge λ_2 successive singuläre Punkte auf $\zeta = 0$ haben, dann verfährt man analog etc. Schliesslich möge der Fall eintreten, dass ausserhalb der durch die Transformation ausgezeichneten Ebene ρ successive singuläre Punkte sich folgen. Dann möge sich dasselbe wiederholen indem $\mu, \mu_1 \ldots . \sigma$ die $\lambda, \lambda_1 \ldots \rho$ entsprechenden Zahlen sind.

Die Transformationsformeln, welche die ganzen Reihe der successiven Punkte auflösen, mögen sein (ohne Indices):

$$(5)\quad x = \varphi(\xi,\eta,\zeta),\ y = \psi(\xi,\eta,\zeta),\ z = \chi(\xi,\eta,\zeta)$$

Setzen wir nun $(6)\ \xi = f(\zeta),\ \eta = g(\zeta)$

wo f und g Funktionen von ζ sind, die zugleich mit ζ verschwinden und welche keine der Funktion φ, ψ, χ identisch zu Null machen und führen wir diese in (5) ein, so stellt (5) eine gewisse Raumkurve dar: auf diese wenden wir der Reihe nach dieselben Transformationen an, wie auf die Fläche $F = 0$. Gelangt man nun von der Fläche $F' = 0$ zu $F^{(r)} = 0$ (wo $F^{(r)}$ die zuletzt erhaltene Fläche ist) dadurch, dass an Stelle von $\xi\ \eta\ \zeta$ die Funktionen φ_1, ψ_1, χ_1 treten, so kann man schreiben

$$x = (\varphi_1 + \alpha_0)\chi_1 \quad y = (\chi_1 + \beta_0)\chi_1, \quad z = \chi_1$$

Dabei denken wir uns in φ_1 etc. ebenfalls die Funktionen f und g eingesetzt. Wendet man auf die Raumkurve die Transformation

$$x = (x' + \alpha_0)z', \quad y = (y' + \beta_0)z', \quad z = z'$$

an, so findet man:

$$(7)\quad x' = \varphi_1 \quad y' = \psi_1 \quad z' = \chi_1$$

Wird ferner die Fläche $F'' = 0$ dadurch in $F^{(r)} = 0$ übergeführt, dass an Stelle von ξ, η, ζ die Funktion von $\varphi_2, \psi_2, \chi_2$ treten, so ist

$$\varphi_1 = (\varphi_2 + \alpha_1)\chi_2 = x', \ \psi_1 = (\varphi_2 + \beta_1)\chi_2 = y'$$
$$\chi_1 = (a\varphi_2 + b\psi_2)\chi_2 = z'$$

Wendet man nun auf die Raumkurve (7) die Transformation

$$x' = (x'' + \alpha_1)z'', \ y' = (y'' + \beta_1)z''$$
$$z' = (ax'' + by'')z''$$

an, so findet man $\quad x'' = \psi_2 \ y'' = \psi_2 \ z'' = \chi_2$

Transformationen von wesentlich anderer Art als diese brauchte man nicht anzuwenden; nach r Transformationen hat man daher:

$$x^{(r)} = \xi = f(\zeta),\ y^{(r)} = \eta = g(\zeta)\ z^{(r)} = \zeta.$$

Da f und g mit ζ verschwinden, so verschwinden immer die rechten Seiten der Transformationsformeln für $\zeta = 0$. Also gehen die aus (5) durch Transformation erhaltenen Raumkurven immer durch den Ursprung der betreffenden Koordinatensysteme, und da in diesen die singulären Punkte liegen, erkennt man, dass die aus (5) durch Substitution von $\xi = f$, $\eta = g$ erhaltene Raumkurve durch sämtliche successiven singulären Punkte hindurchgeht.

Anm. Die Funktionen f und g lassen sich so bestimmen, dass die Raumkurve noch eine weitere Anzahl von Punkten mit der Fläche $F = 0$ gemein hat oder ganz auf dieser liegt.

Wird durch die Transformationsformeln

$$(8)\quad x = \varphi'(\xi, \eta, \zeta),\ y = \psi'(\xi, \eta, \zeta)\ z = \chi'(\xi, \eta, \zeta)$$

die Fläche $F = 0$ in $F^{(i)} = 0$ $(i < r)$ übergeführt und ist $F^{(i)} = 0$ so verschoben, dass sie durch den Ursprung mit einem einfachen Punkt hindurch geht, so kann man für die Umgebung desselben ζ nach ganzen Potenzen von ξ und η entwickeln und die Reihe in (8) einsetzen. Das Entwicklungszentrum kann nun im Allgemeinen so gewählt werden, dass die Reihe für ζ mit Gliedern erster Ordnung beginnt (vgl. jedoch § 5). Sind in (8) die in ξ_1, η_1, ζ_1, niedersten Glieder von der Ordnung k, so beginnen auch die nach Potenzen von ξ und η fortschreitenden Reihen für x, y, z mit Gliedern von der $k$ten Ordnung. Führt man aber in (8) für ξ und η Funktionen von ζ ein, welche beliebig sind, aber denselben Beschränkungen wie f und g unterliegen und die Form haben mögen

$$\xi = A\zeta + B\zeta^2 + \ldots$$
$$\eta = A\zeta + B\zeta^2 + \ldots,$$

so erhält man eine Raumkurve, welche den ursprünglichen singulären Punkt mit dem Entwicklungszentrum auf $F^{(i)} = 0$ verbindet. Die in ζ niedersten Glieder der die Kurve darstellenden Reihen für x, y, z sind dann ebenfalls von der Ordnung r. Verstehen wir nun unter der Ordnung eines Raumkurvenzweigs die Zahl der in einen Punkt zusammenfallenden Schnittpunkte mit einer Ebene von allgemeiner Lage[1]), so können wir den Satz aussprechen:

Die Ordnung der niedersten Glieder in einer Entwicklung für x, y, z, welche sich auf einen Punkt

1) vergl. Segre l. c. S. 8.

der Kurve $F^{(i)}=0$, $\zeta=0$ bezieht, ist gleich der Ordnung des Kurvenzweigs, der den ursprünglichen singulären Punkt mit dem Entwicklungszentrum verbindet (und durch alle zwischenliegenden singulären Punkte hindurchgeht).

Die Transformationsformel, welche sämtliche successiven singulären Punkte bis auf den letzten (einschliesslich) der auf S. 23 angeführten ρ Punkte auflöst, lässt sich, wie man leicht erkennt, auf die Form bringen:

$$(9)\quad \begin{cases} x = \left\{[\Phi(\xi,\eta,\zeta)+A_\rho]\zeta^\rho + A_{\rho-1}\zeta^{\rho-1}+\ldots.+A_1\zeta+A\right\}\zeta^m \\ y = \left\{[\Psi(\xi,\eta,\zeta)+B_\rho]\zeta^\rho + B_{\rho-1}\zeta^{\rho-1}+\ldots+B_1\zeta+B\right\}\zeta^m \\ z = \left\{[X(\xi,\eta,\zeta)+C_\rho]\zeta^\rho + B_{\rho-1}\zeta^{\rho-1}+\ldots+C_1\zeta+C\right\}\zeta^p \end{cases}$$

wo $m \geqq p$

Sämtliche successiven singulären Punkte bis auf den letzten (einschliesslich) der auf S. 23 genannten σ Punkte werden durch eine Transformationsformel aufgelöst, welche man aus (9) dadurch erhält, dass man an Stelle der ξ, η, ζ gewisse Funktionen P, Q, R von ξ, η, ζ setzt, welche im Wesentlichen dieselbe Form haben wie die Ausdrücke (9), an Stelle von ρ wird σ, an Stelle von p möge q treten. In den Ausdrücken P, Q, R werden dann die ξ, η, ζ durch analog gebaute Ausdrücke zu ersetzen sein u. s. w. Betrachten wir nun in der dritten Gleichung (9) die Funktion X als zum Coeffizienten von ζ^ρ gehörig, so können wir aus ihr eine nach Potenzen von ζ fortschreitende Reihe für $z^{\frac{1}{p}}$, daher auch solche für $z^{\frac{m}{p}}$ $z^{\frac{m+1}{p}}, \ldots, z^{\frac{m+\rho}{p}}$ bilden; man weist leicht nach, dass der veränderliche Coeffizient $X+C_\rho$ in diesen Reihen erst auf die Coeffizienten von $\zeta^{m+\rho}$ einen Einfluss hat. Daher können wir aus der Gleichung (9) für x der Reihe nach die Glieder $A\zeta^m$, $A_1\zeta^{m+1}\ldots$ $A_\rho\zeta^{m+\rho}$ fortschaffen, und erhalten:

$$(10)\quad x - \alpha_0 z - c_0 z^{\frac{m}{p}} - c_1 z^{\frac{m+1}{p}} - \ldots - c_\rho z^{\frac{m+\rho}{p}} = \zeta^{\rho+m} G(\xi\eta\zeta)$$

wo die c constant sind, G eine Funktion von $\xi\,\eta\,\zeta$ ist. Diese letztere nimmt durch Einführung der Funktionen P, Q, R an Stelle von ξ, η, ζ die folgende Gestalt an:

$$G = \zeta^n[D_0 + D_1\zeta + \ldots\,\zeta^\sigma \cdot \Phi_1(\xi,\eta,\zeta)]$$

Ferner lässt sich schreiben:

$$z = \zeta^{pq}[E_0 + E_1\zeta + \ldots\,\zeta^\sigma X_1(\xi\eta\zeta]$$

Nun bilden wir der Reihe nach $z^{\frac{m+\rho+n}{pq}}$, $z^{\frac{m+\rho+n+1}{qp}}$ etc.

und schaffen dadurch die Glieder D_0, $D_1\,\zeta$ etc. aus (10) fort. Fahren wir so fort, aus den der Gleichung (10) entsprechenden immer die niedersten Glieder der rechten Seite fortzuschaffen, so erhalten wir schliesslich eine nach gebrochenen Potenzen von z fortschreitende Reihe für x, in der die Nenner der kritischen Exponenten p, pq etc. sind.

Um die Reihen zu erhalten, welche in ihrer Gesamtheit die Umgebung des singulären Punktes darstellen, hat man (s. § 2) für die Umgebung einer genügenden Anzahl von Punkten der Kurve $\zeta=0$ $F^{(i)}=o$ $(i=1, \ldots r)$ ζ nach Potenzen von ξ und η zu entwickeln und die Reihen in die entsprechenden Transformationsformeln einzusetzen; dabei fassen wir die auf einen successiven singulären Punkt bezüglichen Reihen in eine Gruppe zusammen. Durch Betrachtung der Transformationsformeln erkennt man leicht, dass die Reihen der ersten Gruppe mit Gliedern erster Ordnung beginnen, dass die Teilgruppen mit Gliedern höherer Ordnung beginnen, wobei die Ordnung der Anfangsglieder immer um eine bestimmte ganze Zahl steigt. Folgen aber zwei oder mehr Teilgruppen auf einander, bei denen die Ordnung $p, pq \ldots$ der Anfangsglieder der Reihen sich nicht erhöht, so sind die Zahlen $p, pq, \ldots$ die Nenner der kritischen Exponenten in der Entwicklung für die Projektion des die successiven singulären Punkte verbindenden Zweigs auf eine Ebene von allgemeiner Lage.

Wir wollen nun das Ansteigen der Ordnung der Anfangsglieder in den successiven Teilgruppen für einen speziellen Fall untersuchen, nämlich für denjenigen, in dem die Projektion des Kurvenzweigs auf eine Ebene von allgemeiner Lage durch dieselbe Reihenfolge entsprechender quadratischer Transformationen in derselben Weise aufgelöst wird; in diesem Fall ist (vgl. (4))

$$(11) \quad a\gamma_1 + b\delta_1 \leqq 0\ ^{1})$$

und ebenso müssen die entsprechenden späteren Ungleichungen erfüllt sein). In diesem Falle ist die Projektion des Kurvenzweigs auf die (xz)-Ebene so beschaffen, dass auf der durch die erste Transformation ausgezeichneten Geraden $\zeta=0$ λ successive singuläre Punkte liegen, nach λ Transformationen erhält man eine Kurve die λ_1 successive singuläre Punkte auf $\zeta = 0$ hat etc.; schliesslich kommt man zu ρ successiven Punkten in sich ändernder Richtung; dann wird sich alles wiederholen mit $\mu, \mu_1 \ldots \sigma$ an Stelle von $\lambda, \lambda_1, \ldots \rho$

1) Durch Anwendung einer Transformation von der Form (2) ($a = 1$,

wiederholen; eine solche Kurve ist dargestellt durch:

$$(12)\quad x = Az + B_0 z^{\frac{p}{q}} + B_1 z^{\frac{p+1}{q}} + \ldots B_\rho z^{\frac{p+\rho}{q}} + C_0 z^{\frac{p+\rho+p'}{qq'}} + \ldots$$

wo $\frac{p}{q} = 1 + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda_1 + \ldots}}$ $\qquad$ $\frac{p'}{q'} = 1 + \cfrac{1}{\mu + \cfrac{1}{\mu_1 + \ldots}}$ [1]).

Im folgenden brauchen wir nur noch die Glieder niederster Ordnung in den Raumtransformationsformeln zu betrachten, welche ja die Ordnung der Anfangsglieder der Reihen für x, y, z bestimmen. Diese Anfangsglieder sind der Reihe nach (bis auf konstante Faktoren) $(a\xi + b\eta)\zeta = A\zeta$, $A\zeta^2 \ldots A\zeta^\lambda$; $(a_1\xi + b_1\eta)^\lambda \zeta^{\lambda+1} = B^\lambda \zeta^{\lambda+1}$, $B^\lambda \zeta^{2\lambda+1} B^\lambda \zeta^{\lambda_1\lambda+1}$; $C^{\lambda_1\lambda+1} \zeta^{\lambda\lambda_1+\lambda+1}$ etc. Hieraus erkennt man:

Man hat λ Teilgruppen, bei denen die Ordnung der Anfangsglieder jedesmal um 1; dann λ_1 Teilgruppen, bei denen sie um λ; dann λ_2, bei denen sie um $\lambda\lambda_1 + 1, \ldots$. dann λ_k bei denen sie um den Nenner des Kettenbruchs $1 + \cfrac{1}{\lambda_1 + \cfrac{1}{\lambda_2 + \cdot \cdot \cfrac{1}{\lambda_{\varkappa-1}}}}$ ansteigt.

Das Ansteigen findet solange statt, bis der Nenner des ersten kritischen Exponenten in (12) erreicht ist; dann kommen ρ Teilgruppen mit der Ordnung q der Anfangsglieder der Reihen; dann beginnt das Ansteigen wieder nach dem eben ausgesprochenen Gesetz mit μ an Stelle von λ und immer um das q-fache, bis der Nenner des zweiten kritischen Exponenten erreicht ist u. s. w.

§ 5. Mehrfache Faktoren von $(x, y, z)_s$.

Wir lassen nun die seitherige Voraussetzung fallen, dass nämlich $(x, y, z)_s$ nicht, oder nur in einfache Faktoren zerfalle; es sei also:

$b = 0$) auf eine Raumkurve sei man zu einer Kurve von der Form gelangt:

$$\xi = a_1 \lambda^p + a_2 \lambda^{2p} + \ldots + c_0 \lambda^{rp} + c_1 \lambda^{rp+\varkappa}$$
$$\eta = b\lambda^q, \quad \zeta = \lambda^p$$

wo $\varkappa < p$, $rp < q < rp + \varkappa$ ist. Durch die entsprechende weitere Behandlung findet man, dass (11) nicht erfüllt ist, und dass damit die Unmöglichkeit zusammenhängt, die Projektion der Kurve auf die (xz) Ebene (bezw. $(\xi\eta)$-Ebene) durch dieselbe Reihenfolge quadratischer Transformationen aufzulösen.

1) Vergl. Nöther, Sur les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier. Rend. del circ. mat. di Palermo 1890 t. 4. und Königsberger, Theorie der elliptischen Functionen Kap. 9.

$$(x, y, z)_s = (x, y, z)_{s-\lambda t} \cdot (x, y, z)_t^{\lambda} ;$$

wo $\lambda > 1$ und $(x, y, z)_{s-\lambda t}$ auch seinerseits in mehrfache Faktoren zerfallen kann. Ist die ursprüngliche Fläche:

$$(1) \quad F = 0 = (x, y, z)_{s-\lambda t} \cdot (x, y, z)^{t\lambda} + (x, y, z)_{s+1} + \ldots$$

so ist nach einer Transformation von der Form (1) (§ 2):

$$(1') \quad F' = 0 = (\xi, \eta, 1)_{s-\lambda t} \cdot (\xi, \eta, 1)_t^{\lambda} + \zeta(\xi, \eta, 1)_{s+1} + \ldots .$$

Die Ebene $\zeta = 0$ ist also längs der ganzen Kurve $\zeta = 0, (\xi, \eta, 1)_t = 0$ Tangentialebene an die Fläche (1'). Verschiebt man diese so parallel zur Ebene $\zeta = 0$, dass einer der Schnittpunkte von $(\xi, \eta, 1)_t = 0$ und $(\xi, \eta, 1)_{s+1} = 0$ in den Ursprung zu liegen kommt, so sind die niedersten in der Gleichung der verschobenen Fläche auftretenden Glieder von der zweiten Ordnung. Man hat also den Satz:

Zerfällt das Tangentialgebilde eines s-fachen Punkts einer algebraischen Fläche in einen $\lambda_1$fachen t_1-ter, einen $\lambda_2$fachen Faktor t_2-ter etc. Ordnung (wo $\Sigma \lambda_i t_i = s$), so hat jener Punkt $(s+1) \Sigma t$ successive Knotenpunkte in verschiedenen Richtungen, welche:

1. konische Knotenpunkte zweiter Ordnung sind für $\lambda_i = 2$.
2. biplanare Knotenpunkte für $\lambda > 2$.
3. uniplanare Knotenpunkte für $\lambda_i > 2$ und wenn für denselben Punkt auch $(\xi, \eta, 1)_{s+1}$ doppelt verschwindet.
4. Knotenpunkte λ ter Ordnung, wenn $(\xi, \eta, 1)_{s+1} = 0$ in jenem Punkt einen $(\lambda_i - 1)$fachen .... $(\xi, \eta, 1)_{s+i} = 0$ einen $(s' - \varkappa)$-fachen Punkt hat $(\varkappa = 2, 3 \ldots s' - 1)$.

Hat $(x, y, z)_{s+1}$ selbst den Faktor $(x, y, z)_t$, so lautet die Gleichung der transformierten Fläche:

$$0 = F' = (\xi, \eta, 1)_{s-\lambda t} \cdot (\xi, \eta, 1)_t^{\lambda} + \zeta(\xi, \eta, 1)_{s+1-t} \cdot (\xi, \eta, 1)_t + \zeta^2 (\xi, \eta, 1)_{s+2} + \ldots$$

Die Kurve $(\xi, \eta, 1)_t = 0, \zeta = 0$ ist also Doppellinie der Fläche $F' = 0$ (hierüber siehe Anhang).

Was die Reihen betrifft, so ist hervorzuheben, dass die Reihen für x, y, z, welche sich auf Punkte der vielfachen Kurve $(\xi, \eta, 1)_t = 0$ beziehen, sämtliche mit Gliedern von der Ordnung λ_i: beginnen; dies findet in Uebereinstimmung mit dem letzten Satz von § 5 statt, wenn die den singulären Punkt mit dem Entwickelungszentrum auf der Kurve $(\xi, \eta, 1)_t = 0$ verbindende Kurve eine grössere Anzahl von Punkten, als unbedingt nötig ist, mit der Fläche gemein hat; denn dann muss die entsprechende Kurve im zweiten Raum in dem Entwicklungszentrum die Fläche, also auch die Ebene $\zeta = 0$ berühren, also ist der Zweig im ersten Raum ein superlinearer von der Ordnung λ_i. Von den ausgezeichneten Reihen (s. § 2 S. 12) kommen $(s+1) \Sigma \lambda_i t_i$

$(\lambda_i > 1)$ in Wegfall; denn von den $s(s+1)$ Schnittpunkten von $(\xi, \eta, 1)_s = 0$ und $(\xi, \eta, 1)_{s+1} = 0$ fallen eben so viele in die oben besprochenen Knotenpunkte. Dafür treten $(s+1)\,\Sigma\, t_i$ $(\lambda_i > 1)$ Gruppen von Reihen auf. Berühren sich die Kurven $(\xi, \eta, 1)_{ti} = 0$ und $(\xi, \eta\ 1)_{s+1} = 0$ $m$punktig, so fallen $(m-1)$ dieser Gruppen weg, dafür hat eine derselben $(m-1)$ successive Teilgruppen; die entsprechenden successiven vielfachen Punkte liegen auf einem Kurvenzweig $m$ter Ordnung.

Hier ist noch der Fall zu erwähnen, wo man im Verlauf der Transformationen zu einer Fläche $F^{(i)} = 0$ gelangt, die einen $s^{(i)}$ fachen Knotenpunkt hat, von dessen Tangentialgebilde ζ^p ein Faktor ist. Dieser Punkt hat daher $(s^{(i)}+1).p$ successive Knotenpunkte in verschiedenen Richtungen. Diese letzteren lassen sich mit dem ursprünglichen vielfachen Punkt nur durch ebensoviele Kurvenzweige zweiter Ordnung verbinden.

Beispiel. Der einfachste hieher gehörige singuläre Punkt ist der uniplanare Knotenpunkt. Eine Fläche, die einen solchen im Ursprung besitzt, ist die folgende:

(2) $F = 0 = x^2 + f_3 + zf_2 + z^2 f_1 + az^3 + g_4 + zg_3 + z^2 g_2 + z^3 g_1 + bz^4$.

Die f und g bedeuten dasselbe wie in dem Beispiel des § 3. Wir transformieren mittels der Gleichungen:

$$x = \xi\zeta,\ y = \eta\zeta,\ z = \zeta.$$

und erhalten:

(2′) $F' = 0 = \xi^2 + \zeta(f_3 + f_2 + f_1 + a) + \zeta^2(g_4 + g_3 + g_2 + b)$

(f und g sind dieselben Funktionen für ζ und η, wie für x und y.) Entwickelt man für die Umgebung des Ursprungs von (2′), so erhält man:

$$x = -\frac{1}{a}\xi^3 + \frac{1}{a^2}\xi^3 f_1 + \frac{1}{a}\xi^3\left(-f_2 + \frac{1}{a}f_1{}^2 + \frac{1}{a}\xi^2\right) + \ldots.$$

(3) $$y = -\frac{1}{a}\xi^2\eta + \frac{1}{a^2}\xi^2\eta f_1 + \frac{1}{a}\xi^2\eta\left(-f_2 + \frac{1}{a}f_1{}^2 + \frac{b}{a}\xi^3\right) + \ldots.$$

$$z = \zeta = -\frac{1}{a}\xi^2 + \frac{1}{a^2}\zeta^2 f_1 + \frac{1}{a}\xi^2\left(-f_2 + \frac{1}{a}f_1{}^2 + \frac{b}{a}\xi^3\right) + \ldots$$

Sodann ist noch für die Umgebung einer Anzahl von Punkten von $\xi = 0$, $\zeta = 0$ zu entwickeln, etwa für $\eta = \beta$. Setzt man:

(4) $$f_3 = f_3',\ f_2 + \beta\frac{\partial f_2}{\partial y} = f_2',\ f_1 + \beta\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\beta^2}{2}\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} = f_1'$$

$$f_3(0,\beta) + f(0,\beta) + f_1(0,\beta) + a = A$$

und analog für g, so erhalten wir Reihen von der Form (3) mit $f_1' \ldots$ an Stelle von $f_1 \ldots$ und A und B an Stelle von a und b.

Wählen wir nun β so, dass $A = 0$ wird, so hat die um $\eta = -\beta$ parallel zur η-Axe verschobene Fläche einen konischen Knotenpunkt im Ursprung. Da nun die vierte Gleichung (4) drei solche Werte für β giebt, so liegen auf der η-Axe drei konische Knoten der Fläche $F' = 0$. Die Gleichung der verschobenen Fläche ist:

(5) $0 = \xi^2 + f'_1\zeta + B\zeta^2 + \zeta(f'_2 + \zeta g'_1) + \zeta(f'_3 + \zeta g'_2) + \zeta^2 g'_3 + \zeta^2 g'_4$

Um die auf diese drei Knotenpunkte sich beziehenden Reihengruppen herzustellen, haben wir nochmals zu transformieren und zwar mittelst der Gleichungen:

$$\xi = (\xi_1 + \alpha_1)\zeta_1, \quad \eta = (\eta_1 + \beta_1)\zeta_1, \quad z = \xi_1.$$

wo α_1 und β_1 der Gleichung genügen:

$$\alpha_1{}^2 + f'_1(\alpha_1\beta_1) + B = 0.$$

Dann ist die Gleichung der transformierten Fläche (ohne Indices):

(6) $F'' = 0 = \xi^2 + f''_1 + z(f''_2 + g''_1 + A_1) + \zeta^2(f''_3 + g''_2 + h''_1 + B_1) + \ldots$

wo die f'', g'', h'' ... sich in analoger Weise aus den f' und g' bestimmen lassen, wie diese aus den f und g. Man hat nun für die Umgebung einer Anzahl von Punkten der Kurve

$$(6') \quad \xi_2 + f''_1 = 0, \ \zeta = 0$$

ζ nach Potenzen von ξ und η zu entwickeln. Die 6 ausgezeichneten Punkte, um die jedenfalls entwickelt werden muss, sind die Schnittpunkte von (6') mit:

$$(6'') \quad f''_2 + g''_1 + A_1 = 0$$

und die beiden zusammenfallenden ∞ fernen Punkte von 6'. Denn wie man leicht einsieht, ist die der Kurve $(\xi, \eta, 1)_{s+1} = 0$ (in der allgemeinen Theorie § 2) entsprechende Kurve hier die Kurve (6'') und die ∞ ferne Gerade der Ebene $\zeta = 0$. In diesen drei Reihengruppen fallen also zwei ausgezeichnete Reihen mit der auf die ∞ fernen Punkte von (6') sich beziehenden in eine zusammen. Eine der aus (5) hergestellten Entwicklungen der betreffenden Gruppe ist folgende:

$$x = \frac{\alpha_1}{A_1{}^2} f''_1{}^2 + \frac{2\alpha_1}{A_1{}^2}(f''_1 \cdot \xi^2 + g''_1 \cdot f''_1{}^2 + B_1 f''_1{}^3) + \frac{1}{A_1{}^2} f''^2 \xi + \ldots$$

$$y = \frac{\beta_1}{A_1} f''_1{}^2 + \frac{2\beta_1}{A_1{}^2}(f''_1 \xi^2 + g''_1 f''_1{}^2 + B_1 f''_1{}^3) + \frac{1}{A_1{}^2} f''_1{}^2 \eta + \ldots$$

$$z = \frac{1}{A_1} f''_1 + \frac{1}{A_1}(\xi^2 + g'_1 f''_1 + B_1 f''_1{}^2) + \ldots.$$

Wenn die vierte der Gleichungen (4) für β eine Doppelwurzel ergiebt, so sind 2 Knotenpunkte zusammengerückt, man hat dann nur zwei Gruppen obiger Art. Aus der dritten Gleichung (4) er-

kennt man leicht, dass in diesem Fall $f_1' = c\,\xi$ ist. Der Knotenpunkt der Fläche (5) ist dann biplanar und hat, wie sich leicht zeigen lässt, einen successiven konischen Knoten, auf den sich eine Teilgruppe einer jener beiden Gruppen bezieht. (U_7). Analoges gilt, wenn die vierte Gleichung (4) eine dreifache Wurzel hat (U_8).

Ist in Gleichung (5) der Ausdruck $\xi^2 + c\,\xi\,\zeta + B\,\zeta^2$ ein vollständiges Quadrat, so hat die Fläche $F' = 0$ wieder einen uniplanaren Knotenpunkt, der seinerseits drei successive Knotenpunkte hat deren einer in der Richtung der η-Axe liegt, während die andern in beliebigen, getrennten Richtungen liegen. Der erstere wird mit dem ursprünglichen Knotenpunkt durch einen Kurvenzweig zweiter Ordnung, die beiden letzteren durch lineare Kurvenzweige verbunden.

Lässt man die Richtungen in denen die letzten liegen, zusammenfallen, so kann unter Hinzufügung einer der obigen analogen Voraussetzungen auf diesen ein dritter uniplanarer Knotenpunkt folgen u. s. w.[1])

§ 6. Die Konvergenzgebiete der Reihen.

Hat man durch Anwendung einer quadratischen Transformation von der Form $x = (\xi + \alpha)\,\zeta$ etc., auf eine Fläche $F = 0$, welche im Ursprung einen s-fachen Punkt hat, eine Fläche $F' = 0$ erhalten, und für die Umgebung einer Anzahl von Punkten der Kurve $F' = 0$, $\zeta = 0$ Reihen für ζ nach ganzen positiven Potenzen von ξ, η hergestellt, so konvergiert eine solche Reihe nach dem in § 1 aufgestellten Satz für die ξ, η solcher Punkte, welche innerhalb eines gewissen zum Entwicklungszentrum symmetrischen Kurvenzugs K liegen: der durch die Reihe dargestellte Teil der Fläche wird durch einen parallel zur ζ-Achse über K errichteten Cylinder ausgeschnitten. Nun entspricht einer Geraden $\xi = \lambda$, $\eta = \mu$ des zweiten Raums im ersten eine Gerade $x = \lambda z$, $y = \mu z$; also entspricht dem über K errichteten Cylinder des zweiten Raums im ersten ein Kegel, dessen Spitze im Ursprung also im singulären Punkt liegt. Die Reihen (6) (§ 2) konvergieren also innerhalb solcher Kegel, d. h. der durch die Reihen dargestellte Teil der Fläche ist das durch jenen Kegel auf der Fläche ausgeschnittene, dem singulären Punkt zunächst liegende Flächenstück. Die Kurve K darf nun bekanntlich keinen Punkt umschliessen, der den beiden Kurven $(\xi, \eta, 1)_s = 0$ und $(\xi, \eta, 1)_{s+1} = 0$ gemeinschaftlich ist. Also darf ein solcher das Konvergenzgebiet bezeich-

1) conf. Segre l. c. S. 17 ff.

nende Kegel nie eine gemeinschaftliche Kante der Kegel $(x, y, z)_s = 0$ und $(x, y, z)_{s+1} = 0$ umschliessen, höchstens durch sie hindurchgehen, im übrigen werden die einzelnen Kegel in einander übergreifen. Um die ausgezeichneten Reihen zu erhalten, mussten wir transformieren (s. S. 12):

$$x = (\xi + a\zeta + \alpha)\zeta, \; y = (\eta + b\zeta + \beta)\xi, \; z = \zeta.$$

Nun entsprechen aber hier den Geraden $x = c_1$, $y = c_2$ die Kurven:

$$x - C_1 z - az^2 = 0, \; y - C_2 z - bz^2 = 0 \quad (1)$$

(wo die C_1, C_2 für die einzelnen Kurven verschieden, die a, b dieselben sind), also entspricht dem über K errichteten Cylinder ein von den Kurven (1) erzeugtes Flächengebilde, das von dem dem singulären Punkt benachbarten Gebiet der Fläche $F = 0$ ein solches Stück ausschneidet, das durch eine ausgezeichnete Reihe dargestellt wird.

Auf einen singulären Punkt von $F' = 0$, der auf $\zeta = 0$ liegt, bezieht sich eine Gruppe von Reihen, deren Konvergenzgebiete wir jetzt untersuchen wollen. Diese sind offenbar im zweiten Raum die oben besprochenen Kegel, deren Mantellinien gegeben sind durch $\xi + \lambda\zeta = 0$, $\eta + \mu\zeta = 0$. Ist die erste auf $F = 0$ angewandte Transformation $x = (\xi + \alpha_0)\zeta$, $y = (\eta + \beta_0)$ $z = \zeta$, so sind die jenen Mantellinien im ersten Raum entsprechenden Kurven folgende:

$$(2) \qquad x - \alpha_0 z - \lambda z^2 = 0.$$
$$y - \beta_0 z - \mu z^2 = 0.$$

Die das Konvergenzgebiet bestimmenden Flächen werden also von den Kurven (2) gebildet, wo α_1 und β_1 für alle einzelnen Kurven aller Flächen dieselben sind, während λ und μ für alle Kurven andere sind; sämtliche Kurven berühren sich daher im Ursprung. Folgen n successive singuläre Punkte auf den ersten auf einem linearen Zweig, so haben wir für die Teilgruppen der Reihe nach folgende die Konvergenzgebiete bestimmenden Kurven:

$$x = \lambda z, \quad y = \mu z$$
$$x = \alpha_0 z + \lambda z^2, \; y = \beta_0 z + \mu z^2$$
$$x = \alpha_0 z + \alpha_1 z^2 + \lambda z^3, \; y = \beta_0 z + \beta_1 z^2 + \mu z^3$$
$$x = \alpha_0 z + \alpha_1 z^2 + \ldots \alpha_{n-1} z^{n-1} + \lambda z^n, y = \beta_0 z + \beta_1 z^2 + \ldots + \beta_{n-1} z^{n-1} + \mu z^n.$$

Man sieht sofort, dass diese Kurven den die successiven vielfachen Punkte verbindenden linearen Kurvenzweig der Reihe nach 2, 3 . . . $n$punktig berühren.

Die das Konvergenzgebiet der ausgezeichneten Reihen bestimmenden Kurven sind jedesmal von einer um 1 höheren Ordnung.

Folgen sich r successive vielfache Punkte auf einem superlinearen Zweig, so erkennt man leicht, dass die Kurven, welche in ihrer

Gesamtheit die Konvergenzgebiete der auf den $i$ten ($i = 1, 2, \ldots r$) Punkt bezüglichen Reihenteilgruppe bestimmen, ganz dieselbe Singularität im Ursprung besitzen, wie die den $i$ten Punkt mit dem ursprünglichen verbindende (und dann die Fläche verlassende) Kurve. Also:

Die Gebiete der Fläche $F = 0$, welche von den Reihen irgend einer Teilgruppe dargestellt werden, werden eingeschlossen von Kurven, welche auf der Fläche $F = 0$ von durch gewisse Kurven erzeugten Flächengebilden ausgeschnitten werden. Diese letzteren Kurven haben mit demjenigen Kurvenzweig, der den ursprünglichen singulären Punkt mit demjenigen verbindet, auf den sich die Teilgruppe bezieht, jedes zwischen diesen beiden Punkten liegende Element gemeinsam.

§ 7. Das Verhalten des der Fläche von einem Punkt von allgemeiner Lage aus unbeschriebenen Kegels in der nach dem singulären Punkt gehenden Kante.

1. Geht eine Fläche $F = 0$ durch eine quadratische Transformation von der Form (4) (§ 2) über in $F' = 0$, so geht die Polare von $F = 0$ in Bezug auf einen Pol, der Doppelpunkt des Fundamentalkegelschnitts der Transformation ist, über in die Polare von $F' = 0$ [1]). Daher geht auch der von einem solchen Punkt aus der Fläche umbeschriebene Kegel durch dieselbe Transformation über in einen der Fläche $F' = 0$ umbeschriebenen Kegel. Bei unserer Transformation ist aber der Fundamentalkegelschnitt die doppelt gedachte ∞ ferne Gerade der Ebene $\zeta = 0$ [2]); also ist jeder Punkt desselben ein Doppelpunkt. Ist nun die transformierte Fläche:

$$(1) \quad 0 = F' = (\xi, \eta, 1)_s + \zeta(\xi, \eta, 1)_{s+1} + \ldots$$

und hat die Kurve

$$(2) \quad (\xi, \eta, 1)_s = 0 \quad \zeta = 0$$

einen Doppelpunkt durch den $(\xi, \eta, 1)_{s+1} = 0$ nicht hindurchgeht, so berührt ein Kegel mit der Spitze auf der ∞ fernen Geraden der Ebene $\zeta = 0$ diese Ebene längs der Kante zum Doppelpunkt einelementig, im Fall eines Rückkehrpunkts von (2) ist die Berührung zweielementig, im Fall eines die Klasse von (2) um p Einheiten erniedrigenden Doppelpunkts, $(p-1)$-elementig. Die Spur des betreffenden Kegelmantels auf der (η, ζ)-Ebene ist also gegeben durch eine Entwicklung von der Form:

1) Levi l. c. S. 237.
2) s. S. 9.

$$\eta = A\zeta^{\frac{1}{p}} + \dots .$$

Dann ist der entsprechende Mantel im ersten Raum gegeben durch:

$$(3) \quad y = \alpha z + A z^{\frac{p+1}{p}} + \dots$$

Man hat also den Satz:

„Hat der Tangentialkegel im singulären Punkt einer Fläche, $(x, y, z)_s = 0$, eine die Klasse desselben um p Einheiten erniedrigende Doppelkante, durch die nicht auch $(x, y, z)_{s+1} = 0$ hindurchgeht, so geht der der Fläche von der Spitze $z = t = 0$, $x = cy$ aus umbeschriebene Kegel durch den singulären Punkt (ausser mit etlichen linearen[1]) Mänteln) mit einem Mantel von der Form (3)".

Hat die Kurve (2) einen $r$fachen Punkt, so lässt sich (1) auf die Form bringen:

$$0 = F' = \zeta + \zeta\varphi_1 + \zeta\varphi_2 + \dots \zeta\varphi_{r-2} + \varphi_r + \dots$$

wo die φ ganze homogene Funktionen von x, y, z sind. Wählt man als Pol den ∞ fernen Punkt der ξ—Axe, so ist die Polare:

$$\frac{\partial F'}{\partial \zeta} = 0 = c_1\zeta + \zeta\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} + \dots \zeta\frac{\partial \varphi_{r-2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial \xi} + \dots$$

also ist die Berührungskurve des Kegels:

$$(4) \quad \zeta = A_0\eta^r + A_1\eta^{r+1} + \dots$$
$$\xi = B_0\eta + B_1\eta^2 + \dots$$

wo A_0 und B_0 sich bestimmen aus:

$$A_0 + \varphi_r(B, 1, 0) = 0$$
$$\frac{\partial \varphi_r(B, 1, 0)}{\partial x} = 0$$

Es gibt also $(r-1)$ Werte B_0; die Spur des entsprechenden Kegelmantels auf der (yz)-Ebene im 1. Raum ist offenbar

$$(5) \quad y = \alpha_0 z + a_1 z^{\frac{r+1}{r}} + \dots .$$

Also: Eine r-fache Kante des Kegels $(x,y,z)_s = 0$ durch die $(x,y,z)_{s+1} = 0$ nicht hindurchgeht, bewirkt, dass der umbeschriebene Kegel durch den singulären Punkt $(r-1)$ Mäntel von der Form (5) hindurchschickt, welche diese Kante berühren.

Anm. Hat φ_r $(\xi, \eta, 0)$ einen Doppelfaktor, so ist einer der Zweige (5) von der Ordnung $(r+1)$. Ein mehr als zweifacher Faktor würde bewirken, dass schon die Reihen (4) gebrochene Exponenten haben.

2. Leicht erkennt man folgende Sätze:

„Besteht ein singulärer Punkt einer Fläche aus $(n+1)$ succes-

[1]) d. h. solchen, die durch eine Ebene nach einem linearen Kurvenzweig geschnitten werden.

siven singulären Punkten, auf einem linearen Kurvenzweig, so schickt der umbeschriebene Kegel (ausser einer Anzahl von Mänteln in verschiedenen Richtungen) solche durch den singulären Punkt, welche untereinander und mit dem Kurvenzweig der Reihe nach 1, 2, . . . n elementige Berührungen eingehen. Die $\varkappa$ elementige Berührung fällt weg, wenn der $(\varkappa+1)$te und $(\varkappa+2)$te Punkt gleich vielfach sind".

„Liegen die successiven vielfachen Punkte auf einem superlinearen Zweig von der am Schluss von § 4 besprochenen spezielleren Art, so schickt der umbeschriebene Kegel durch den singulären Punkt superlineare Mäntel, in deren Entwicklungen die höchsten kritischen Exponenten, welche (der Reihe nach) gleich der Ordnung der Anfangsglieder der successiven Teilgruppen sind und deren niedere kritischen Exponenten dieselben sind, wie die in der Entwicklung der Projektion des Kurvenzweigs auf eine Ebene von allgemeiner Lage auftretenden".

Für beide Fälle gilt:

„Wenn man für die durch den singulären Punkt gehenden Mäntel des umbeschriebenen Kegels y in Reihen nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von z entwickelt, so lassen diese sich in Gruppen zusammenfassen, wo die Reihen zu einer Gruppe gehören, die bis zu demselben Gliede mit einander übereinstimmen.

3. Zerfällt der Ausdruck $(\xi, \eta, 1)_s = 0$ in mehrfache Faktoren, so hat man folgendes:

Längs der Kante, welche Tangente an einem λ-fachen Bestandteil von $(\xi, \eta, 1)_s = 0$, $\zeta = 0$, ist, berührt der der Fläche $F' = 0$ umbeschriebene Kegel die Ebene $\zeta = 0$ $(\lambda-1)$ elementig. Der diesem Mantel im ersten Raum entsprechende ist dargestellt durch:

$$(6) \quad y = \alpha z + A z^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} + \ldots$$

Also: „Ein λ-facher Faktor $t$ter Ordnung von $(x, y, z)_s$ bewirkt $t(t-1)$ Mäntel des umbeschriebenen Kegels von der Form (6) (mit verschiedenen Richtungen).

b) „Jede gemeinschaftliche Kante eines λ-fachen und eines μ-fachen Bestandteils von $(x, y, z)_s = 0$ bewirkt das Auftreten eines Kegelmantels mit einer Entwicklung von der Form:

$$y = \alpha z + A z^{\frac{\lambda+\mu+1}{\lambda+\mu}} + \ldots$$

c) „Jede gemeinschaftliche Kante eines λ-fachen Bestandteils von $(x, y, z)_s = 0$ und von $(x, y, z)_{s+1} = 0$ bewirkt einen Kegelmantel mit einer Entwicklung von der Form:

$$y = \alpha z + A z^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} + \ldots$$

Diese Beweise für b) und c) sind ganz analog dem des zweiten Satzes von 1.

Beispiel: $s = 2$, $\lambda = 2$ (uniplanarer Knotenpunkt) [1]). Die Gleichung der Fläche sei:

$$(7) \quad F = 0 = x^2 + f_3 + z f_2 + z^2 f_1 + a z^3 + g_4 + \ldots$$

Durch die Transformation $x = \xi\zeta$, $y = \eta\zeta$, $z = \zeta$ erhält man:

$$(7') \quad F' = 0 = \xi^2 + \zeta(f_3 + f_2 + f_1 + a) + \zeta^2(g_4 + \ldots) + \ldots$$

Durch $\xi = 0 = \zeta = 0$, $f_3 + f_2 + f_1 + a = 0$ (8)

werden drei konische Knotenpunkte von $F = 0$ bestimmt. Der um (7') umbeschriebene Kegel K' schneidet offenbar die Ebene $\zeta = 0$ in den Mantellinien zu diesen drei Knotenpunkten einfach; also schickt der um $F = 0$ umbeschriebene Kegel K durch den uniplanaren Knotenpunkt drei Mäntel in verschiedenen Richtungen (U_6). Hat Gleichung (8) eine Doppelwurzel η, so fallen zwei Knotenpunkte zusammen; K' berührt also $\zeta = 0$; von obigen drei Mänteln sind also zwei verzweigt (U_7). Hat (8) eine dreifache Wurzel η, so ist der Mantel, den K durch den Knotenpunkt schickt, gegeben durch eine Entwicklung von der Form

$$y = \alpha z + A z^{\frac{4}{3}} + \ldots$$

Dies ist der U_8. Hat (8) eine Doppelwurzel η_1 und hat in dem Punkt $(o, \eta_1, 0)$ die Fläche $F' = 0$ wieder einen uniplanaren Knotenpunkt, so schickt K' durch diesen im allgemeinen drei Mäntel in verschiedenen Richtungen (deren einer aber immer $\zeta = 0$ ist, der also für den ersten Raum nicht in Betracht kommt). Daher schickt K durch den ursprünglichen uniplanaren Knoten drei Mäntel, von denen zwei sich selbst berühren (zweiter Fall des U_8). u. s. w.

4. Hat $F' = 0$ einen singulären Punkt, zu dessen Tangentialgebilde $\zeta^p = 0$ gehört, so kann geschrieben werden:

$$F' = 0 = \zeta^p f_{r-p} f + f_{r-1} + \ldots$$ [2])

wo die f homogene Funktion von ξ, η, ζ sind. Dieser singuläre Punkt bewirkt, dass der um $F = 0$ beschriebene Kegel $(r-p)$ $(r-p-1)$ sich berührende lineare Mäntel und $2r-p$ sich berührende Mäntel, die dargestellt sind durch:

$$y = \alpha z + A z^{\frac{2p+1}{p+1}} + \ldots$$

durch den ursprünglichen singulären Punkt schickt.

Der Beweis hiefür ist ganz analog dem für den zweiten Satz von 1).

1) Vergl. Rohn, Beitrag zur Theorie der biplanaren und uniplanaren Knotenpunkte, Math. Ann. 22.

2) Den Fall, dass f_{r+1} ebenfalls einen Faktor ζ hat, haben wir bis jetzt ausgeschlossen, weil hier eine successive singuläre Linie auftritt; doch lässt er sich ähnlich behandeln.

Anhang.

Näherungsflächen für die Punkte der singulären Kurven einer Fläche.

Es sei

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0$$

die Gleichung einer algebraischen Fläche, welche eine s-fache Linie besitzt. Setzen wir $x = x_1 + a$, $y = y_1 + b$, $z = z_1$, so ist

$$(2) \quad F(x, y, z) = F(a, b, z) + \left[x_1 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{a,\, b,\, z} + y_1 \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{a,\, b,\, z} \right]$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[x_1^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{a,\, b,\, z} + 2x_1 y_1 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{a,\, b,\, z} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{a,\, b,} \right] + \ldots .$$

wo wir unter $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{a,\, b,\, z}$ verstehen: $\frac{\partial F}{\partial x}$ für $x = a$, $y = b$, $z = z$.

Die singuläre Linie der Fläche möge zunächst einfach durch den Ursprung gehen und in dessen Umgebung gegeben sein durch:

$$(3) \quad \begin{cases} x = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \ldots = \varphi(z) \\ y = \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \beta_3 z^3 + \ldots = \psi(z) \end{cases}$$

Nimmt man nun a und b nicht als konstanten, sondern $a = \varphi(z)$ $b = \psi(z)$, so ist:

$$F(a, b, z) = F[\varphi(z),\ \psi(z),\ z] \equiv 0$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\varphi,\, \psi,\, z} \equiv 0 \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\varphi,\, \psi,\, z} \equiv 0$$

. . . . . .

$$\left(\frac{\partial^{s-1} F}{\partial x^{s-1}}\right)_{\varphi,\, \psi,\, z} \equiv 0 \text{ etc.}$$

(Denn die s-fache Linie liegt auf der Fläche und auf jeder ersten, zweiten . . . $(s-1)$ten Polaren derselben). Setzt man ferner

$$(4) \quad x_1 = \xi\eta,\ y_1 = \eta,\ z_1 = \zeta.$$

so wird aus (2):

$$(5)\quad F' = 0 = \xi^s\left(\frac{\partial^s F}{\partial x^s}\right)_{\varphi,\psi,\zeta} + \xi^{s-1}\left(\frac{\partial^s F}{\partial x^{s-1}\partial y}\right)_{\varphi,\psi,\zeta} + \ldots + \xi\left(\frac{\partial^s F}{\partial x \partial y^{s-1}}\right)_{\varphi,\psi,\zeta} + \left(\frac{\partial^s F}{\partial y^s}\right)_{\varphi,\psi,\zeta}$$

$$+ \frac{\eta}{s+1}\left[\xi^{s+1}\left(\frac{\partial^{s+1} F}{\partial x^{s+1}}\right)_{\varphi,\psi,\zeta} + \ldots + \left(\frac{\partial^{s+1} F}{\partial y^{s+1}}\right)_{\varphi,\psi,\zeta}\right] + \frac{\eta^2}{(s+2)(s+1)}[..] + ..$$

Dabei sind φ, ψ dieselben Funktionen in ζ wie oben in z. Durch Zusammenziehen der einzelnen Transformationsformeln ergiebt sich:

$$(6)\quad \begin{cases} x = \xi\eta + \varphi(\zeta) \\ y = \eta + \psi(\zeta) \\ z = \zeta \end{cases}$$

Die Transformation ist, wie man leicht sieht, ein-eindeutig. Dem Punkt $x = y = z = 0$ entspricht die Gerade $\eta = \zeta = 0$; einem Punkt $x = \varphi(c)$, $y = \psi(c)$, $z = c$ entspricht die Gerade $\eta = 0$, $\zeta = c$. Dagegen entspricht einem auf $\eta = 0$ liegenden Punkt der Kurve $F' = 0$, $\zeta = c$ eine Tangentenrichtung in dem singulären Punkt, den die Kurve $F = 0$, $z = c$ in dem Schnittpunkt der Ebene $z = c$ mit der singulären Kurve besitzt. Man erkennt daher leicht, dass den Kurvenzweigen $F' = 0$, $\eta = 0$ (für hinreichend kleine ζ) die Mäntel der Fläche (1) durch die singuläre Linie entsprechen.

Die Gleichung (5) ist nun nicht notwendig eine algebraische (ausser wenn die beiden Reihen (3) endlich sind); sie hat einen Sinn überhaupt nur innerhalb gewisser Grenzen, welche durch die Konvergenzgebiete von (3) gegeben sind. Vernachlässigen wir sämtliche Potenzen von z von der $p$ten an, (wo p hinreichend gross zu nehmen ist), so erhalten wir für die Nachbarschaft der ganzen Ebene $\zeta = 0$ eine algebraische „Näherungsfläche“ von $F' = 0$. Den Mänteln dieser Näherungsfläche in der Umgebung der Punkte $F' = 0$, $\eta = 0$ $\zeta = 0$ entsprechen im ursprünglichen Raum offenbar Mäntel einer Näherungsfläche von $F = 0$ für die Umgebung des Punkts $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Es können nun folgende Fälle eintreten:

1. Die auf der ξ-Axe liegenden Punkte der Fläche $F' = 0$ sind einfache Punkte. Man wird eine der Variabeln ξ, η, ζ in Reihen nach ganzen positiven Potenzen der beiden andern entwickeln, welche für die Näherungsfläche die Umgebung dieser Punkte darstellen, und diese Reihen in (6) einsetzen.

2. Die auf der ξ-Axe liegenden Punkte von $F' = 0$ sind vielfache Punkte dieser Fläche, welche nicht auf einer singulären Linie liegen. Der Punkt ist ein s'-facher, wenn die Kurven:

$$F' = 0,\ \eta = 0 \text{ einen } s' \text{fachen}$$
$$\frac{\partial F'}{\partial \eta} = 0,\ \eta = 0 \text{ einen } (s'-1) \text{fachen}$$
$$\frac{\partial^{s-1} F'}{\partial \eta^{s-1}} = 0,\ \eta = 0 \text{ einen einfachen}$$

Punkt (mindestens) in jenem besitzen. (Die erste Kurve kann auch einen mehrfachen Bestandteil durch diesen Punkt haben, wenn nur die zweite nicht denselben Faktor hat). Hier hat man auf die Näherungsfläche eine gewöhnliche räumliche quadratische Transformation anzuwenden.

3. Die erste jener Kurven hat einen s'fachen Faktor, die zweite hat denselben Faktor $s'-1$fach, die dritte $(s'-2)$fach etc. (mindestens); dann hat die Fläche $F' = 0$ eine s'fache Linie, welche gegeben sein möge durch $\eta = 0,\ \xi = g(\zeta)$. Setzen wir nun wie oben:

$$\xi = \xi' + g(\zeta'),\ \eta = \eta',\ \zeta = \zeta'$$

so ist wiederum:

$$F'[g(\zeta'),\ 0,\ \zeta'] = 0$$
$$\left(\frac{\partial F'}{\partial \xi}\right)_{g, 0, \zeta'} = 0 \text{ etc.}$$

und es bleibt z. B. im Fall einer Doppellinie:

$$0 = \xi'^2 \left(\frac{\partial^2 F'}{\partial \xi^2}\right) + 2\xi\eta\left(\frac{\partial^2 F'}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \eta^2\left(\frac{\partial^2 F'}{\partial \eta^2}\right) + \cdots$$

(wo die Klammergrössen eine analoge Bedeutung haben wie oben). Setzen wir nun an Stelle von $g(\zeta)$ eine Funktion $\xi = g'(\zeta')$ ein, wo $g'(\zeta')$ eine nach ganzen positiven Potenzen von ζ' fortschreitende Reihe ist, welche den entsprechenden Zweig der algebraischen Näherungsfläche darstellt, setzen wir ferner $\xi' = \xi_1\ \eta_1,\ \eta' = \eta_1,\ \zeta' = \zeta_1$, so gelangen wir zu einer Fläche $F'' = 0$, an deren Stelle wir abermals durch Vernachlässigung der höheren Potenzen von ζ eine algebraische Näherungsfläche treten lassen wollen. In dieser Weise ist fortzufahren, bis man zu einfachen Punkten gelangt, was nach einer endlichen Anzahl von Transformationen der Fall ist, da es sich ja im Grunde hier um ebene Transformationen, angewandt auf ebene algebraische Kurven (nämlich die Schnitte von $z = c$), handelt.

Der erste der besprochenen Fälle tritt ein bei allen Punkten von s-fachen Linien mit lauter Mänteln erster Ordnung[1]) (wenn sich nicht etliche Mäntel längs der ganzen singulären Kurve berühren), ferner bei Mänteln höherer Ordnung und erster Klasse in den all-

1) Ein Mantel $n$ter Ordnung ist dadurch definiert, dass er durch eine Ebene nach einem superlinearen Kurvenzweig $n$ter Ordnung geschnitten wird.

gemeinen Punkten der singulären Linie. Der zweite Fall tritt ein bei Mänteln höherer Ordnung und erster Klasse in gewissen ausgezeichneten Punkten, z. B. beim „closepoint“. Für den letzteren erkennt man dies sofort, wenn man die Transformation (6) anwendet auf eine Flächengleichung von der Form:

$$f^2\varphi + 2fg^2\chi + g^3\psi = 0\ ^1)$$

Diese Fläche hat eine Rückkehrkurve $f = 0$, $g = 0$ und Clospunkte in den Punkten $f = 0$, $g = 0$ $\psi = 0$. Denkt man sich eine Fläche mit superlinearen Mänteln höherer Ordnung analog dargestellt, so erkennt man leicht die Richtigkeit der obigen Behauptung. Der dritte Fall tritt dann ein, wenn ein durch einen allgemeinen Punkt der vielfachen Kurve gelegter ebener Schnitt einen aus einer Anzahl successiver vielfacher Punkte bestehenden, singulären Punkt hat, also z. B. im Falle zweier sich längs der singulären Kurve berührender Mäntel.

Anm. 1. Wenn im dritten Fall die s'fache Kurve der Fläche $F' = 0$ die ξ-Axe berührt, so ist statt einer Funktion $\xi = g(\zeta)$ umgekehrt eine Funktion $\zeta = h(\xi)$ einzuführen. Dieser Fall tritt ein, wenn durch die singuläre Linie der Fläche (1) zwei Paare sich berührender Mäntel hindurchgehen und die Näherungsfläche gesucht wird für einen Punkt der singulären Kurve, in dem die beiden Tangentialebenen zusammenfallen.

Anm. 2. Handelt es sich um die Näherungsfläche für einen Punkt, der für die vielfache Kurve ein singulärer ist, so ist dieser vorher durch gewöhnliche räumliche quadratische Transformationen aufzulösen.

Anm. 3. Sind die Reihen (3) endlich, und gelangt man durch die Anwendung der Transformation (5) nur zu den Fällen 1) oder 2), so ist die Fläche $F' = 0$ eine algebraische; dann stellen die so erhaltenen Reihen die Fläche (1) selbst in der Umgebung des betreffenden Punktes dar. Diese Darstellung ist insbesondere auch für die ausgezeichneten Punkte (Zwickpunkte, Clospunkte) giltig.

Beispiel: Die Fläche:

$$(y^2 - 3x - y + 2z + 1)y^2 + 2y(y - x - 1)(y + 2x + 2x^2 + yz - 4z^2) + \\ + (y + 2x + 2x^2 + yz - 4z^2)^2 = 0$$

hat eine Doppelkurve, nämlich:

$$y = 0,\ x + x^2 - 2z^2 = 0.$$

Sie hat im Ursprung einen Zwickpunkt mit der Tangentialebene

1) vergl. Zeuthen, théorie des surfaces reciproques Math. Ann. 10.

$x^2 = 0$. Die Transformationsformeln sind

$$x = \xi\eta + 2\zeta^2 - 4\zeta^4 + 16\zeta^6 - 80\zeta^8 + \ldots$$
$$y = \eta$$
$$z = \zeta$$

Die Näherungsfläche im Ursprung ist dargestellt durch die Reihenentwicklung:

$$x = -2\xi\zeta + 2\zeta^2 - 4\xi^3 - 2\xi^2\zeta + 9\xi\zeta^2 + \ldots.$$
$$y = -2\zeta - 4\xi^2 - 2\xi\zeta + 9\zeta^2 - 18\xi^2\zeta + 17\xi\zeta^2 + 22\zeta^3 + \ldots$$
$$z = \zeta.$$